أسئلة نموذجية لمسابقة كاوست للرياضيات

فئة A

1. بما أن $\sqrt{x^2} = |x|$ و $\sqrt{3} > 3/2$, فإننا نحصل على:

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2} = \left|\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right| = \sqrt{3} - \frac{3}{2} + \sqrt{3} - \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} - 2$$

2. لتكن مساحة الحقل X والزمن اللازم لإنجاز العمل بالدقائق هو T. نلاحظ أن معدل عمل أحمد هو $\frac{X}{240}$ (لأن 4 ساعات = 240 دقيقة)، بينما معدل عمل خالد هو $\frac{X}{360}$ (لأن 6 ساعات = 360 دقيقة). وعليه، فإن المعادلة التي تصف عملهما معًا هي:

$$\left(\frac{X}{240} + \frac{X}{360}\right) T = X$$

بقسمة الطرفين على X، نحصل على معادلة لـ T:

$$\left(\frac{1}{240} + \frac{1}{360}\right) T = 1 \implies \left(\frac{3+2}{720}\right) T = 1 \implies \frac{5}{720} T = 1 \implies T = \frac{720}{5} = 144$$

3. لاحظ أن:

$$a^2 + 2ab + 4b^2 + 2^{10} = 2^{10} + 2^{10} + 2^{10} + 2^{10} = 4 \cdot 2^{10} = 2^{12}$$

4. أقل مجموع ممكن لستة أعداد صحيحة موجبة ومختلفة هو $1+2+3+4+5+6 = 21$. بما أن المجموع المطلوب أعلى بمقدار واحد فقط، فإن الاحتمال الوحيد هو $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 22$, لأن إضافة واحد إلى أي عدد آخر في المجموعة الأصلية ينتج عنه عددان لهما نفس القيمة. وعليه، يكون حاصل الضرب هو:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 840$$

5. أول ثلاث خطوات هي:

$$6 \ \to \ 3 \ \to \ 5 \ \to \ 6.$$

6. إذا كان P هو نقطة التقاء النصف دائرة والقطعة BD، و O هو منتصف AB فإن المساحة المظللة يمكن حسابها بالطريقة التالية:

$$\text{المساحة المظللة} = [\triangle ABD] - [\text{قطاع}(OPA)] - [\triangle OPB] = \frac{12^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot 6^2\pi - \frac{6 \cdot 6}{2} = 54 - 9\pi.$$

7. الزاوية الداخلية للخماسي المنتظم هي $108°$، لذا $w = 108$ و $x = 108/2 = 54$ و $y = 108/3 = 36$ و $z = 108/4 = 27$ $\Leftarrow w + x + y + z = 108 + 54 + 36 + 27 = 225$.

8. سيختار أحمد كتابًا واحدًا أو مجلة واحدة بـ $3+7$ طرق، وقلم حبر واحد أو قلم رصاص واحد بـ $3+5$ طرق. لذلك، فإن العدد الإجمالي للطرق هو:

$$(7+3)\cdot(5+3) = 10\cdot 8 = 80$$

9. أولاً نلاحظ أن المقطع الذي يصل بين مركزي خليتين طوله $\sqrt{5}$ إذا وفقط إذا كانت الخليتان تقعان عند زاويتين متقابلتين في مستطيلٍ أبعاده 2×3 أو 3×2. في كل مستطيلٍ من النوع 2×3 أو 3×2 يوجد مقطعان من هذا النوع (أحدهما يصل بين الزاوية العلوية اليسرى والسفلية اليمنى، والآخر يصل بين الزاوية العلوية اليمنى والسفلية اليسرى). ومن الواضح أن عدد المستطيلات من النوع 2×3 يساوي عدد المستطيلات من النوع 3×2 بسبب التناظر بالدوران. وبالتالي فإن العدد الكلي للمقاطع يساوي أربعة أضعاف عدد المستطيلات من النوع 2×3. ولعدّ هذه المستطيلات، نلاحظ أن موضع الزاوية العلوية اليسرى يحدد المستطيل بالكامل. يجب أن تقع هذه الزاوية ضمن الشبكة الفرعية ذات الأبعاد 10×9 في الركن العلوي الأيسر، وإلا فإن المستطيل 3×2 سيخرج عن حدود الشبكة الأصلية ذات الأبعاد 11×11. وعليه فإن عدد المستطيلات 3×2 هو $9\cdot 10 = 90$، وبالتالي يكون عدد المقاطع المطلوبة هو $4\cdot 90 = 360$.

10. التكلفة الجديدة للشخص الواحد تُحسب كالتالي:

$$\frac{12\cdot 20}{10} = 24$$

وعليه، فإن المبلغ الإضافي هو الفرق بين التكلفة الجديدة والقديمة:

$$24 - 20 = 4$$