أسئلة نموذجية لمسابقة كاوست للرياضيات

فئة B

1.

$$\frac{2^{-2}+3^0}{(-0.5)^{-2}-5\cdot 2^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+3.75=\frac{\frac{1}{4}+1}{(\frac{1}{-2})^{-2}-5\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}}+3.75=$$

$$=\frac{\frac{5}{4}}{(-2)^2-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}+3.75=\frac{\frac{5}{4}}{5}+4.75=\frac{1}{4}+3.75=4.$$

2. أول ظهور للعدد n في المتتابعة يكون في الموضع: $[1+2+\cdots+(n-1)]+1=\frac{(n-1)n}{2}+1$ وآخر ظهور له يكون في الموضع: $[1+2+3+\cdots+n]=\frac{n(n+1)}{2}$ نحن نبحث عن العدد n الذي يحقق المتباينة التالية للموضع 5000: $\frac{(n-1)n}{2}<5000\leq\frac{n(n+1)}{2}$ بضرب المتباينة في 2: $(n-1)n<10000\leq n(n+1)$. بالتالي $n^2=10000\Leftarrow n=100$.

3. نلاحظ أنه يمكن التعويض في الدالة $H(x)$ مباشرة:

$$\begin{aligned}H(3)&=[F(4)]+[G(2)]\\&=(4^2+4+1)+(2^2-2+1)\\&=(21)+(3)=24\end{aligned}$$

4. لاحظ أن $y^2+5=x^3+1$ وبالتالي فإن $\frac{y^2+5}{x+1}=\frac{x^3+1}{x+1}=x^2-x+1$. وعليه، فإن قيمة المقدار تساوي $(x^2-x+1)+x-y=x^2-y+1=5+1=6$.

5. من الواضح أن ارتفاع الأسطوانة هو 2، ونصف قطر قاعدتها الدائرية هو $\sqrt{2}$.
وعليه، فإن الحجم المطلوب هو:

$$\pi(\sqrt{2})^2\cdot 2-2^3=4\pi-8.$$

6. $x+70=35+100$، لذا $x=65$.

7. لتحقيق القيمة العظمى للتعبير $a-2c$ ، نحتاج أن يكون a هو الضلع الأكبر وc هو الضلع الأصغر. وبذلك يكون لدينا:

$$a\geq b\geq c\geq 1.$$

من متباينة المثلث نحصل على:

$$a<b+c=2025-a\quad\Rightarrow\quad a\leq 1012.$$

ومن ثم:

$$a - 2c \leq 1012 - 2 \cdot 1 = 1010.$$

وتتحقق المساواة عندما تكون القيم:

$$(a, b, c) = (1012, 1012, 1).$$

8. نبحث عن أصغر سعة إجمالية s للحافلات بحيث تكون $s \geq 555$ ويمكن كتابتها على الصورة $s = 27x + 36y$, حيث يمثل x و y عدد الحافلات من النوع الأول والثاني على التوالي. بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 27 و 36 هو 9, فإن s يجب أن يكون من مضاعفات العدد 9. أصغر مضاعف للعدد 9 أكبر من أو يساوي 555 هو 558. وبما أنه يمكن تحقيق السعة 558 (على سبيل المثال، $27 \cdot 18 + 36 \cdot 2 = 558$), فإننا نستنتج أن عدد المقاعد الشاغرة N هو $558 - 555 = 3$.

9. ليكن $n + 1 = k^2 \Leftarrow n = k^2 - 1$. من (d): $n + 4 = k^2 + 3$ هو عدد مكون من ثلاث خانات، لذا $100 \leq k^2 + 3 \leq 999$، أي $10 \leq k \leq 31$.
من (c): $n + 3 = k^2 + 2 \equiv 0 \pmod{11} \Leftarrow k^2 \equiv 9 \pmod{11}$. لذا $k \equiv \pm 3 \pmod{11}$.
من (b): $n + 2 = k^2 + 1$ عدد أولي، لذا k هو عدد زوجي. في المجال $10 \leq k \leq 31$، القيم الممكنة لـ k هي 14 و30. نتحقق من (b):

$$k = 14 \Rightarrow n = 195, \quad n + 2 = 197 \ \text{(أولي)},$$
$$k = 30 \Rightarrow n = 899, \quad n + 2 = 901 = 17 \cdot 53 \ \text{(غير أولي)}.$$

لذا $n = 195$ ومجموع خانات العدد $3n = 585$ هو $5 + 8 + 5 = 18$.

10. لحل المسألة، يمكننا حساب عدد قيم x الصحيحة الممكنة لكل قيمة صحيحة لـ y من -11 إلى 11. المتباينة هي $|x| \leq 11 - |y|$.

- إذا كانت $y = \pm 11$, فإن $|x| \leq 0 \implies x = 0$ (نقطة واحدة لكل قيمة، المجموع 2).
- إذا كانت $y = \pm 10$, فإن $|x| \leq 1 \implies x \in \{-1, 0, 1\}$ (6).
- إذا كانت $y = \pm 9$, فإن $|x| \leq 2 \implies x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (5 نقاط لكل قيمة، المجموع 10).

$$\vdots$$

- إذا كانت $y = \pm 1$, فإن $|x| \leq 10 \implies x \in \{-10, \ldots, 10\}$ (21 نقطة لكل قيمة، المجموع 42).
- إذا كانت $y = 0$, فإن $|x| \leq 11 \implies x \in \{-11, \ldots, 11\}$ (23 نقطة).

العدد الكلي للنقاط هو مجموع النقاط لجميع قيم y:

$$= 23 + 2 \times (1 + 3 + 5 + \cdots + 21) = 23 + 2 \times 121 = 23 + 242 = 265.$$

11. المجاميع التي يمكن الحصول عليها من رمي حجري النرد وتقبل القسمة على 5 هي 5 و 10.

- احتمال الحصول على مجموع 5 هو $\frac{4}{36}$ (من الحالات: $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$).
- احتمال الحصول على مجموع 10 هو $\frac{3}{36}$ (من الحالات: $(4,6),(5,5),(6,4)$).

بما أن الحدثين منفصلان، فإن الاحتمال الكلي هو مجموعهما:

$$\frac{4}{36}+\frac{3}{36}=\frac{7}{36}.$$

12. يحدث أقصى عدد من الجولات عندما تنتهي اللعبة. للوصول إلى هذا الحد الأقصى، نفترض أن اللاعبين الآخرين قد وصلوا إلى أقصى عدد ممكن من النقاط دون إنهاء اللعبة.

عندما تنتهي اللعبة، يكون لدى اللاعب الفائز 10 نقاط، بينما يمتلك كل من اللاعبين الأربعة الآخرين 9 نقاط على الأكثر. بما أن كل جولة تمنح نقطة واحدة فقط، فإن العدد الأقصى للجولات هو المجموع الكلي للنقاط:

$$10+(4\times 9)=10+36=46$$