نموذج أسئلة لمسابقة جامعة الملك عبد الله للعلوم والتقنية (كاوست) للرياضيات
المرحلة النهائية، مسار الشباب

1. ما هو أصغر عدد صحيح موجب n يجعل $n \cdot 1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 7!$ مربعًا كاملاً؟
ملاحظة: لأي عدد صحيح موجب k، $k!$ هو حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة من 1 الى k. أي أن $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

الحل 1. لاحظ أن التعبير يكافئ: $n \cdot (4!)^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. وبما أن $(4!)^2 \cdot 2^4 \cdot 3^2$ هو مربع كامل، فإن $35n$ يجب أن يكون مربعًا كاملاً، مما يعني أن $n = 35$ هي أصغر قيمة ممكنة.

2. يختار حاتم ثلاثة أعداد صحيحة مختلفة عشوائيًا من المجموعة $\{-5, -4, -3, \ldots, 4, 5\}$. ما احتمال أن يكون مجموع الأعداد المختارة هو 0؟

الحل 2. لإيجاد الاحتمال، نقسم عدد النتائج الناجحة (الثلاثيات غير المرتبة التي مجموعها صفر) على العدد الإجمالي للنتائج المحتملة.
1. إجمالي عدد النتائج المحتملة: تحتوي المجموعة على 11 عددًا صحيحًا. نظرًا لأن ترتيب الاختيار لا يهم ويجب أن تكون الأعداد الصحيحة مختلفة، فإن العدد الإجمالي للثلاثيات الممكنة يُعطى بصيغة التوافيق $\binom{n}{k}$: **الإجمالي** $= \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165$.
2. النتائج الناجحة (المجموع = 0): نبحث عن الثلاثيات $\{a, b, c\}$ بحيث يكون $a + b + c = 0$. لضمان أن كل ثلاثية فريدة وتجنب العد المزدوج، نفترض أن $a < b < c$. سننظم عملية العد بناءً على العدد الصحيح الأكبر c:

- الحالة $c = 5$: $\{-5, 0, 5\}, \{-4, -1, 5\}, \{-3, -2, 5\}$ (**3 ثلاثيات**)
- الحالة $c = 4$: $\{-5, 1, 4\}, \{-4, 0, 4\}, \{-3, -1, 4\}$ (**3 ثلاثيات**)
  (ملاحظة: تُستبعد المجموعة $\{-2, -2, 4\}$ لأن الأعداد الصحيحة يجب أن تكون مختلفة.)
- الحالة $c = 3$: $\{-5, 2, 3\}, \{-4, 1, 3\}, \{-3, 0, 3\}, \{-2, -1, 3\}$ (**4 ثلاثيات**)
- الحالة $c = 2$: $\{-3, 1, 2\}, \{-2, 0, 2\}$ (**ثلاثيتان**).
- الحالة $c = 1$: $\{-1, 0, 1\}$ (**ثلاثية واحدة**)

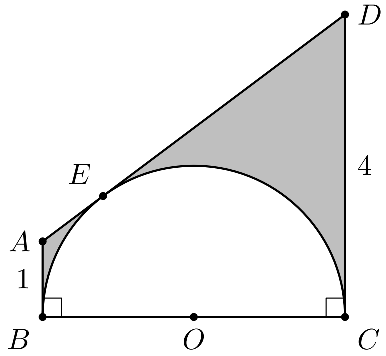
بجمع الحالات الناجحة: $3 + 3 + 4 + 2 + 1 = 13$. الاحتمال المطلوب هو $\frac{13}{165}$.

3. أوجد جميع الثلاثيات x, y, z التي تحقق المعادلتين:

$$x^2 + 4y^2 + 2(x - 2y) + 2 = 0 \quad \text{و} \quad 2xy + 4yz + zx - 4 = 0$$

الحل 3. يمكن كتابة المعادلة الأولى على الصورة $(x+1)^2+(2y-1)^2=0$. وهذا يعني أن $x=-1$ و $y=\frac{1}{2}$.
وبالتعويض في المعادلة الثانية، نحصل على $-1+2z-z-4=0$ بالتالي $z=5$. إذًا $(x,y,z)=\left(-1,\frac{1}{2},5\right)$.

4. في الشكل أدناه، لدينا شبه المنحرف $ABCD$ بحيث $AB \parallel CD$ و $BC \perp AB$ و $AB=1$ و $CD=4$.
الدائرة التي مركزها O وقطرها $\overline{BC}$ تمس الضلع $\overline{AD}$ عند النقطة E. احسب مساحة المنطقة المظللة.



الحل 4. الحل 1. لنرمز إلى الدائرة بـ $\mathcal{O}$. بما أن AD مماس للدائرة $\mathcal{O}$ عند E، فإن AO و DO ينصفان الزاويتين $\angle EAB$ و $\angle EDC$ على التوالي، مما يعطي $\angle AOD=90^\circ$ لأن $AB \parallel CD$. لذلك، $\triangle ABO \sim \triangle OCD$ ونحصل على النسب:
$$\frac{AB}{OC}=\frac{BO}{CD}.$$
ومن ذلك، نجد أن $OC \cdot OB = OB^2 = AB \cdot CD = 4 \Rightarrow OC = 2$. وبالتالي، مساحة الشكل المظلل هي مساحة شبه المنحرف ناقص مساحة نصف الدائرة التي نصف قطرها $OC=2$. أي:
$$\text{Area}(ABCD)-\frac{\text{Area}(\mathcal{O})}{2}=\frac{AB+CD}{2}\cdot BC-\frac{\pi OC^2}{2}=\frac{5}{2}\cdot 4-\frac{4\pi}{2}=10-2\pi.$$

الحل 2. بما أن $AE=AB=1$ و $DE=DC=4$، فإن $AD=AE+ED=5$. ولإيجاد BC، نستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث $\triangle ADF$، حيث F هي مسقط A على CD. ومنه، $BC=\sqrt{AD^2-DF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. وبالتالي، مساحة المنطقة المظللة هي مساحة شبه المنحرف ناقص مساحة نصف الدائرة، أي $\frac{(1+4)\cdot 4}{2}-\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=10-2\pi$.

5. أوجد أكبر عدد صحيح k بحيث يكون المقدار 300^9-3^9 قابلاً للقسمة على 3^k.

الحل 5. لاحظ أن $300^9-3^9=3^9(100^9-1)=3^9(10^{18}-1)=3^9(10^9-1)(10^9+1)$. العدد 10^9+1 لا يقبل القسمة على ثلاثة بينما 10^9-1 يقبل. علاوة على ذلك: $10^9-1=(10^3-1)(10^6+10^3+1)$.
لاحظ أن $10^3-1=27\cdot 37$ وأن العدد 10^6+10^3+1 يقبل القسمة على 3 ولا يقبل القسمة على 9 لأن مجموع

أرقامه يساوي 3. وبذلك، فإن 10^9-1 يقبل القسمة على 3^4 ولا يقبل القسمة على 3^5. ومنه فإن $k=4+9=13$.

الحل 2. بكتابة 300^9-3^9 على الشكل:

$$3^9(10^{18}-1)=3^9\cdot\underbrace{99\ldots9}_{18}=3^{11}\cdot\underbrace{11\ldots1}_{18}$$

عن طريق القسمة المطولة، نجد أن:

$$3^9(10^{18}-1)=3^{13}\cdot 12345679012345679,$$

وبالتالي، نحصل على $k=13$، لأن العامل الثاني ليس مضاعفاً للعدد 3 حيث أن مجموع أرقامه يساوي 74.

6. يتواجد على الطاولة أربعة مضلعات، مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 1 وثلاثة مضلعات منتظمة أخرى متطابقة طول ضلع كل منها 1 أيضاً. كل مضلعين من المضلعات الأربعة يشتركان في ضلع واحد فقط، ولا يوجد تداخل بين أي مضلعين منها. ما هو محيط الشكل الناتج عن هذه المضلعات؟

الحل 6. لنفرض أن المضلعات الثلاثة المتطابقة لها n ضلع. وبما أن كل مضلع يشترك في ضلع واحد مع المثلث متساوي الأضلاع، فإن المضلعات الثلاثة مرتبة حول المثلث. وبناءً على ذلك، يلتقي مضلعان مع المثلث عند كل رأس من رؤوسه، ومن ثم، يشترك هذان المضلعان في ضلع واحد. لذا، لدينا عند كل رأس من رؤوس المثلث ثلاثة أشكال: مثلث متساوي الأضلاع ومضلعان، بحيث يكون مجموع زواياهما الداخلية المحيطة بالرأس مساوياً لـ $360°$. وبما أن إحدى هذه الزوايا هي $60°$ والزاويتين الأخريين هما $\frac{(n-2)180°}{n}$ (زاوية المضلع ذي الـ n ضلعاً)، نحصل على المعادلة التالية:

$$60°+\frac{2\cdot(n-2)\cdot180°}{n}=360°.$$

وبحل هذه المعادلة، نحصل على $n=12$. وبالتالي، فإن محيط الشكل الناتج هو $3(n-3)=27$.

7. لتكن $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{2026}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية التي تحقق العلاقة:

$$x_{i+1}=\frac{i-x_i}{i}$$

لكل $i=1,2,\ldots,2025$. أوجد المجموع:

$$S=x_1+2x_2+3x_3+\cdots+2024x_{2024}+2025x_{2025}+2025x_{2026}.$$

الحل 7. لاحظ أن العلاقة تكافئ:

$$ix_{i+1}=i-x_i \iff (i+1)x_{i+1}=(x_{i+1}-x_i)+i,\quad i\geq 1$$

الآن نقوم بجمع هذه العلاقة لجميع قيم i حتى 2025 لنحصل على:

$$\sum_{i=1}^{2025}(i+1)x_{i+1}=\sum_{i=1}^{2025}(x_{i+1}-x_i)+\sum_{i=1}^{2025}i$$

بالتبسيط:

$$S + x_{2026} - x_1 = x_{2026} - x_1 + \frac{2025 \cdot 2026}{2} \Rightarrow S = \frac{2025 \cdot 2026}{2}.$$

8. هناك عدة أعداد صحيحة مختلفة على السبورة، كل منها أكبر من 20. حاصل ضرب أصغر هذه الأعداد وأكبرها يساوي مجموع بقية الأعداد. ما هو أقل عدد ممكن من الأعداد الصحيحة الموجودة على السبورة؟

الحل 8. لتكن $20 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ هي الأعداد الموجودة على السبورة. إذا الأعداد تحقق المعادلة:

$$x_1 x_n = x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}$$

الطرف الأيسر من هذه المعادلة لا يقل عن $21x_n$، بينما الطرف الأيمن أقل من $(n-2)x_n$. وهذا يقتضي أن $n - 2 > 21$ أو ما يكافئ $n \geq 24$. ولإثبات إمكانية تحقق الحالة عند $n = 24$، نعتبر ال 24 عدداً صحيحاً التالية، وجميعها أكبر من 20:

$$21,\ 231,\ 232,\ \ldots,\ 252,\ 253$$

مجموع الأعداد ال 22 (باستثناء الأول والأخير) يساوي:

$$231 + 232 + \cdots + 252 = \frac{(231 + 252) \cdot 22}{2} = 483 \cdot 11 = 5313$$

وهو ما يساوي $x_1 \cdot x_n = 21 \cdot 253$.