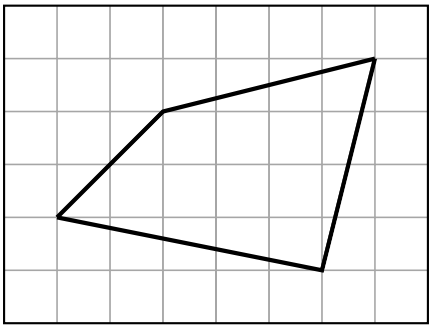
نموذج أسئلة لمسابقة جامعة الملك عبد الله للعلوم والتقنية (كاوست) للرياضيات المرحلة النهائية، مسار الناشئين

1. في متتابعة حسابية (متتابعة تكون فيها القيمة بين الحدود المتتالية ثابتة)، خمسة حدود متتالية هي $a, x, b, c, 2x$. ما قيمة $\frac{a+b}{c}$؟

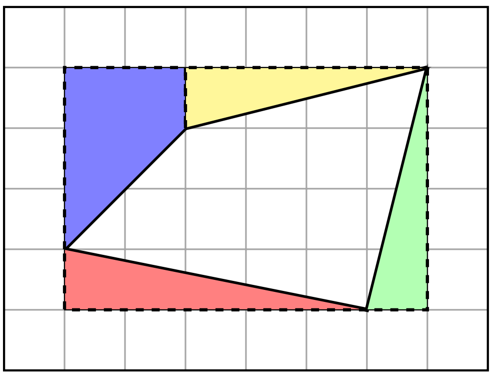
الحل 1. لاحظ أن $2x = a + b$ و $2c = b + 2x$ و $2b = c + x$. وبحذف b من المعادلتين الأخيرتين، يتبين أن $c = \frac{5x}{3}$. وبالتالي، فإن القيمة المطلوبة هي $\frac{6}{5}$.

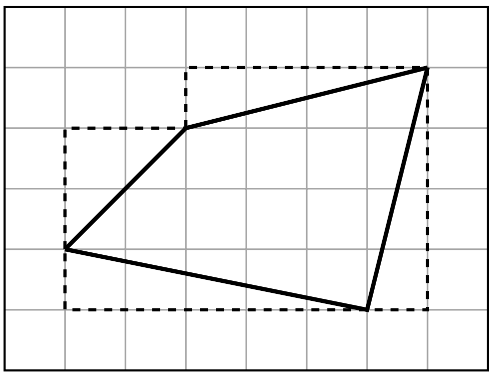
2. أوجد مساحة ومحيط الشكل الرباعي الموضح أدناه، بفرض أن كل مربع صغير طول ضلعه 1 وأن رؤوس الشكل الرباعي تقع على نقاط الشبكة.



الحل 2. مساحة الشكل الرباعي تساوي مساحة المستطيل المنقط ذي الأبعاد 6×4 مطروحاً منها مساحات المناطق الملونة (انظر الشكل الأيسر). مساحة المنطقة الحمراء هي $5/2 = 2.5$، والمنطقة الخضراء 2، والزرقاء 4، والصفراء 2. وبالتالي، مساحة الرباعي تساوي: $4 \cdot 6 - (2 + 4 + 2 + 2.5) = 13.5$.
لإيجاد المحيط، نستخدم المثلثات قائمة الزاوية المكونة من الأضلاع المنقطة (انظر الشكل الأيمن). وبتطبيق نظرية فيثاغورس على كل مثلث، نحصل على:

$$\sqrt{4+4} + \sqrt{1+16} + \sqrt{1+16} + \sqrt{1+25} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{17} + \sqrt{26}$$





3. إذا كان باقي قسمة العدد 95 على N هو 4، أوجد أصغر قيمة ممكنة للعدد الصحيح الموجب N.

الحل 3. بما أن N أكبر من 4 ويقسم $95-4=91=7\cdot 13$، فإن أصغر قيمة ممكنة هي 7.

4. تمت كتابة جميع الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة بشكل متتابع:

$$246810121416182022\ldots$$

ما هو الرقم الذي يظهر في الخانة رقم 2026؟

الحل 4. الأعداد الزوجية المكونة من خانة واحدة هي $2,4,6,8$، أي 4 أرقام في المجمل.
الأعداد الزوجية المكونة من خانتين هي $10,12,\ldots,98$، أي 45 عدداً، وتساهم بـ $45\cdot 2=90$ رقماً.
الأعداد الزوجية المكونة من ثلاث خانات هي $100,102,\ldots,998$. هناك 450 عدداً، وتساهم بـ $450\cdot 3=1350$ رقماً.
وبذلك، فإن الرقم رقم 2026 يقع ضمن الأعداد الزوجية المكونة من 4 خانات. موقعه ضمن هذه الأعداد هو:

$$2026-(4+90+1350)=582$$

بما أن $582=4\cdot 145+2$، فإن أول 145 عدداً زوجياً مكوناً من 4 خانات هي $1000,1002,\ldots,1288$. ومن ثم، يكون الرقم المطلوب هو الرقم الثاني من العدد 1290، أي أنه الرقم 2.

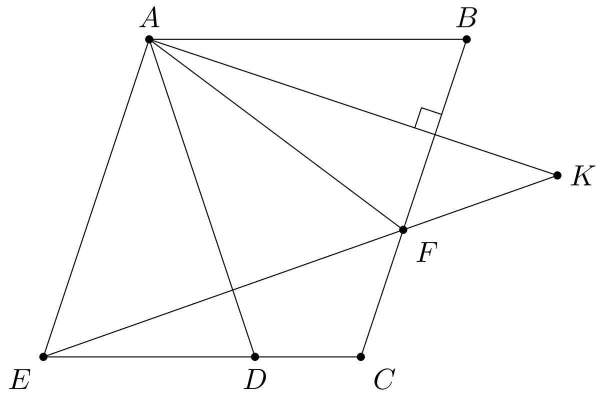
5. أوجد جميع قيم a و b و c التي تحقق نظام المعادلات التالية:

$$\begin{cases} ab-a-b=-7 \\ bc-b-c=7 \\ ca-c-a=-13. \end{cases}$$

الحل 5. الحل 1. بإضافة 1 إلى المعادلة الأولى، نحصل على $ab-a-b+1=-6 \Rightarrow (a-1)(b-1)=-6$. وبفعل الشيء نفسه للمعادلات الأخرى وضربها ببعضها نحصل على: $(a-1)(b-1)(c-1)=\pm\sqrt{(-6)(8)(-12)}=\pm 24$
الحالة 1 $(+24)$: بالقسمة على $(a-1)(b-1)=-6$ نحصل على $c-1=-4$ وبالمثل $a-1=3, b-1=-2$. بالتالي $a=4, b=-1, c=-3$
الحالة 2 (-24): بالمثل كما في الحالة السابقة نحصل على $c-1=4, a-1=-3, b-1=2 \Rightarrow a=-2, b=3, c=5$

الحل 2. نعبّر عن المعادلة الأولى كـ $a(b-1)=(b-7)$. الآن واضح أن $(b-1)$ غير صفري وبالتالي عند القسمة عليه نحصل على $a=(b-7)/(b-1)$. وبالتعويض في المعادلة الثالثة، نصل إلى $c=2b-1$. وبالتعويض عن ذلك في المعادلة الثانية نحصل على $b^2-2b-3=0$ مما يقتضي أن $b_1=-1$ و $b_2=3$. ومنه، فإن $(a,b,c)=(-2,3,5)$ و $(4,-1,-3)$.

6. في الشكل أدناه، $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين، $ABCE$ معين، $\angle ABC = 72^\circ$. AF هو منصف الزاوية لـ $\angle DAB$. تقع النقطة K على EF بحيث $AK \perp BC$. أوجد الزاوية $\angle AKE$.



الحل 6. بما أن $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين، فإن $\angle BAD = 72^\circ$. ومنه، $\angle BAF = 36^\circ$. بالنظر إلى المثلث ABF نجد أن $\angle AFB = 72^\circ$، وبالتالي $AF = AB$. وبما أن $ABCE$ معين، فهذا يعني أن $AF = AE$. ومن ناحية أخرى، $AE \parallel BC$، مما يقتضي أن $\angle EAF = \angle AFB = 72^\circ$، ومنه $\angle AFE = \angle AEF = 54^\circ$. وأخيراً، بالنظر إلى المثلث ΔEAK وحقيقة أن $\angle KAE = 90^\circ$، نجد أن $\angle AKE = 36^\circ$.

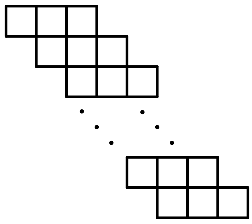
7. أوجد جميع الأعداد الأولية p, q, r, s (ليس بالضرورة أن تكون مختلفة) التي تحقق المعادلة:

$$p \cdot q \cdot r \cdot s = (p+1)(q+1)(r+1).$$

الحل 7. بدون فقدان العمومية، افترض أن r أكبر من p و q. وبما أن r لا يقسم $r+1$، فإن الشرط r يقسم $(p+1)(q+1)(r+1)$ يقتضي أن r يقسم $p+1$ أو $q+1$. ومرة أخرى بدون فقدان العمومية، نفترض أن r يقسم $p+1$. وبما أن $r \geq p$، يجب أن يكون $r = p+1$، مما يفرض أن $p = 2$ و $r = 3$. والآن، بما أن $q \leq r = 3$، فإن ذلك يحصر قيمة q في 2 أو 3. وبالتحقق المباشر، نجد أن $q = 3$ لا يعطي قيمة صحيحة لـ s، بينما يعطي $q = 2$ القيمة $s = 3$. لذلك، فإن الحلول هي جميع تبديلات (p, q, r) مع $s = 3$:

$$(p,\ q,\ r,\ s)\ \in\ \{(2,2,3,3),\ (2,3,2,3),\ (3,2,2,3)\}.$$

8. يتكون شكل درجي من 100 صف، يحتوي كل منها على ثلاثة مربعات، بحيث يُزاح كل صف بمقدار مربع واحد إلى اليمين بالنسبة للصف الذي فوقه، كما هو موضح أدناه. بكم طريقة يمكن وضع الأعداد من 1 إلى 300 في المربعات (عدد واحد لكل مربع، بحيث يُستخدم كل عدد مرة واحدة فقط) بحيث تتزايد الأعداد من اليسار إلى اليمين في كل صف ومن الأعلى إلى الأسفل في كل عمود؟



الحل 8. لننظر إلى الصف رقم k وبالتحديد إلى المربع الأوسط في هذا الصف. العدد في هذا المربع أكبر من العدد الموجود في المربع الأيسر، وكذلك من جميع الأعداد في الصفوف التي فوقه، والتي يبلغ مجموعها $1 + 3(k-1) = 3k-2$ عدداً. ومن ناحية أخرى، هو أصغر من العدد الموجود في المربع الأيمن، وكذلك من جميع الأعداد في الصفوف التي تحته، والتي يبلغ مجموعها $1 + 3(100-k) = 301 - 3k$ عدداً. وبالتالي، يجب على العدد في هذا المربع أن يكون $3k-1$، مما يملأ جميع المربعات الوسطى من الأعلى إلى الأسفل كـ $2, 5, 8, 11, \ldots$. وهذا أيضاً يلزم أن يكون المربع الأيسر في الصف العلوي هو 1، والمربع الأيمن في الصف السفلي هو 300. بالنسبة للمربعات الأخرى، لننظر إلى المربع الأيمن في الصف k مع المربع الأيسر في الصف $(k+1)$ ونلاحظ أنهما يقعان بين المربعين الأوسطين للصفين k و $(k+1)$، وهما $(3k-1)$ و $(3k+2)$. ومن ثم، يجب ملء هذين المربعين بالعددين $3k$ و $3k+1$، وأي من الطريقتين لملئهما تعتبر صحيحة. وبأخذ $k = 1, 2, \ldots, 99$ بعين الاعتبار، نكون قد غطينا جميع المربعات، وبالتالي نجد أن العدد الإجمالي للطرق لملء المربعات هو 2^{99}.