نموذج أسئلة لمسابقة جامعة الملك عبد الله للعلوم والتقنية (كاوست) للرياضيات
المرحلة النهائية، مسار الشباب

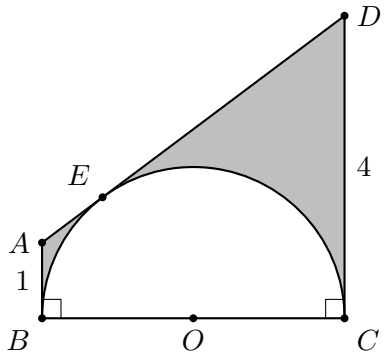
1. ما هو أصغر عدد صحيح موجب n يجعل $n \cdot 1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 7!$ مربعًا كاملاً؟
ملاحظة: لأي عدد صحيح موجب k، $k!$ هو حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة من 1 الى k. أي أن $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

2. يختار حاتم ثلاثة أعداد صحيحة مختلفة عشوائيًا من المجموعة $\{-5, -4, -3, \ldots, 4, 5\}$. ما احتمال أن يكون مجموع الأعداد المختارة هو 0؟

3. أوجد جميع الثلاثيات x, y, z التي تحقق المعادلتين:

$$2xy + 4yz + zx - 4 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + 4y^2 + 2(x - 2y) + 2 = 0$$

4. في الشكل أدناه، لدينا شبه المنحرف $ABCD$ بحيث $AB \parallel CD$ و $BC \perp AB$ و $AB = 1$ و $CD = 4$. الدائرة التي مركزها O وقطرها $\overline{BC}$ تمس الضلع $\overline{AD}$ عند النقطة E. احسب مساحة المنطقة المظللة.



5. أوجد أكبر عدد صحيح k بحيث يكون المقدار $300^9 - 3^9$ قابلاً للقسمة على 3^k.

6. يتواجد على الطاولة أربعة مضلعات، مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 1 وثلاثة مضلعات منتظمة أخرى متطابقة طول ضلع كل منها 1 أيضاً. كل مضلعين من المضلعات الأربعة يشتركان في ضلع واحد فقط، ولا يوجد تداخل بين أي مضلعين منها. ما هو محيط الشكل الناتج عن هذه المضلعات؟

7. لتكن $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2026}$ متتابعة من الأعداد الحقيقية التي تحقق العلاقة:

$$x_{i+1} = \frac{i - x_i}{i}$$

لكل $i = 1, 2, \ldots, 2025$. أوجد المجموع:

$$S = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 2024x_{2024} + 2025x_{2025} + 2025x_{2026}.$$

8. هناك عدة أعداد صحيحة مختلفة على السبورة، كل منها أكبر من 20. حاصل ضرب أصغر هذه الأعداد وأكبرها يساوي مجموع بقية الأعداد. ما هو أقل عدد ممكن من الأعداد الصحيحة الموجودة على السبورة؟