



KMC 2026

KAUST MATHEMATICS COMPETITION

مسابقة كاوست للرياضيات

Questions & Solutions

الأسئلة و الحلول



Table of Contents

Preface	3
Word of the Scientific Committee	4
Scientific Committee Members	5
Juniors Track Questions - First Round	6
Seniors Track Questions - First Round	17
Juniors Track Questions - Second Round	30
Seniors Track Questions - Second Round	33
Juniors Track Answer Key - First Round	36
Seniors Track Answer Key - First Round	37
Solutions to the Juniors Track Questions - First Round	38
Solutions to the Seniors Track Questions - First Round	64
Solutions to the Juniors Track Questions - Second Round	97
Solutions to the Seniors Track Questions - Second Round	109

Preface

At **KAUST Academy**, we are pleased to present this booklet containing the **official solutions to the Phase 1 questions of the KAUST Math Competition (KMC 2026)** across both tracks: Juniors and Seniors. This booklet provides complete, step-by-step solutions to all problems—**24 questions for the Juniors track** and **30 questions for the Seniors track**—and includes a **dedicated video link for every question** to offer clear, structured explanations and to help students grasp the key mathematical ideas behind each solution.

This booklet has been developed to provide students across the Kingdom with high-quality practice materials and authentic examples of problems that assess **higher-order thinking skills** in mathematics. By combining full written solutions with video explanations, we aim to support meaningful self-study and systematic preparation for participation in future editions of the competition.

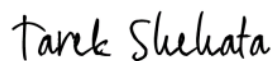
We would also like to extend our sincere appreciation to the **Scientific Committee of the KAUST Math Competition (KMC 2026)** for their outstanding academic efforts in **designing and reviewing the questions**, and for contributing to the development of this booklet in a way that reflects the highest standards of rigor, consistency, and educational clarity—through comprehensive written solutions complemented by a video explanation for each problem. This collective work reflects our shared commitment to empowering students in the Kingdom and strengthening mathematical excellence.

We are proud of the strong engagement in Phase 1, with approximately **8,000 students** participating from across the Kingdom—an encouraging indicator of the growing interest in mathematical problem-solving and academic excellence.

We hope this booklet serves as a valuable reference for every student and supports their journey toward deeper mathematical understanding and continued achievement.



Dr. Sultan Albarakati
Associate Vice President, Saudi Talent
Development



Tarek Shehata
Manager of Pre-University Programs

Word of the Scientific Committee

The problems presented in this competition are deliberately challenging, designed to rigorously test the limits of analytical thinking. The 200 students participating in the final round truly showcase the remarkable mathematical talent present across the Kingdom of Saudi Arabia. It is our sincere hope that engaging with these difficult problems will not only reward their hard work but also inspire a deeper, lasting motivation among all students to continue studying mathematics.

The compilation of these problems and their solutions is the result of a collaborative effort. I would like to express my gratitude to the dedicated team of KAUST students and postdocs, as well as to Navid Safaeli, who joined remotely, for generously contributing their time and expertise to develop the problems and craft their detailed solutions. In particular, I want to highlight Melih Ucer, who served as my right-hand and provided invaluable assistance throughout this process.

I also extend my deepest thanks to the KAUST Academy. Special gratitude goes to its director, Sultan Albarakati, for putting forward this initiative and offering his unfailing support, and to Tarek Shehata for his constructive criticism and instrumental help in moving this project forward. Finally, I would like to thank my fellow Academic Committee members, Miguel Urbano and Katerina Nik, for their guidance and collaboration.



Prof. Diogo Gomes
Chair of the Scientific Committee

Scientific Committee



Dr. Sultan Albarakati



Tarek Shehata



Prof. Diogo Gomes



Prof. Miguel Urbano



Prof. Katerina Nik



Dr. Navid Safaei



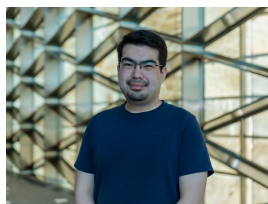
Dr. Pirahmad Olimjoni



Dr. Melih Ucer



Majid Almarhoumi



Asaad Mohammedsaleh



Hamza Alshaikhi

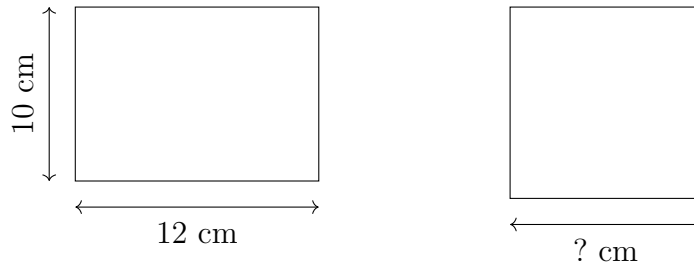
Juniors Track Questions-First Round

أسئلة مسار الناشئين - المرحلة الأولى

Question 1:

The sides of a rectangle are 10 cm and 12 cm. A square has the same perimeter as this rectangle. What is the length of a side of the square?

أطوال أضلاع مستطيل هي 10 سم و 12 سم، ومربع له نفس محيط هذا المستطيل، ما طول ضلع المربع؟



- (A) 8 cm (B) 9 cm (C) 10 cm (D) 11 cm (E) 12 cm

Question 2:

In which of the following numbers is the number of odd digits even?

في أي من الأعداد التالية يكون عدد الخانات الفردية زوجياً؟

- (A) 12435 (B) 821563 (C) 80753941 (D) 87556931 (E) 95819632

Question 3:

Ahmad usually takes 20 minutes to get to school. On the other hand, Khalid takes 30 minutes to get to school. On a certain day, Ahmad took 30% more time than usual to get to school, while Khalid took 15% less time than usual. Which of the following is correct?

عادةً ما يستغرق أحمد 20 دقيقة للوصول إلى المدرسة، في المقابل يستغرق خالد 30 دقيقة للوصول إلى المدرسة. في إحدى الأيام، استغرق أحمد وقتاً أطول بنسبة 30% من المعتاد للوصول إلى المدرسة، بينما استغرق خالد وقتاً أقل بنسبة 15% من المعتاد. أي العبارات التالية صحيحة؟

- | | |
|--|---------------------------------|
| (A) Ahmad arrives 1.5 minutes before Khalid. | وصل أحمد قبل خالد بـ 1.5 دقيقة. |
| (B) Ahmad arrives 0.5 minutes before Khalid. | وصل أحمد قبل خالد بـ 0.5 دقيقة. |
| (C) They arrive at the same time. | وصل أحمد وخالد في الوقت نفسه. |
| (D) Khalid arrives 0.5 minutes before Ahmad. | وصل خالد قبل أحمد بـ 0.5 دقيقة. |
| (E) Khalid arrives 1.5 minutes before Ahmad. | وصل خالد قبل أحمد بـ 1.5 دقيقة. |

Question 4:

Notebooks were made in three colors: red, gray, and blue. The number of red notebooks is six less than the total number of blue and gray notebooks. Also, the number of gray notebooks is ten less than the total number of red and blue notebooks. How many blue notebooks were made?

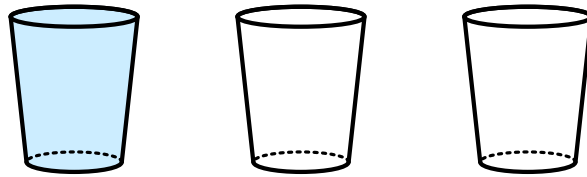
صُنعت دفاتر بثلاثة ألوان: أحمر ورمادي وأزرق، عدد الدفاتر الحمراء أقل بستة من مجموع الدفاتر الزرقاء والرمادية، و عدد الدفاتر الرمادية أقل بعشرة من مجموع الدفاتر الحمراء والزرقاء، كم عدد الدفاتر الزرقاء التي صُنعت؟

- | | | | | |
|-------|-------|--------|--------|--------|
| (A) 6 | (B) 8 | (C) 10 | (D) 12 | (E) 14 |
|-------|-------|--------|--------|--------|

Question 5:

There are three cups on a table. The first cup is full of water; the other two are empty. Ali pours half of the water from the first cup into the second. Then he pours half of the water from the second cup into the third. Finally, he pours half of the water from the third cup into the first. What percentage of the first cup is filled with water at the end?

هناك ثلاثة أكواب على طاولة، الكوب الأول ممتلئ بالماء، والآخرا فارغان، يسكب علي نصف الماء من الكوب الأول في الثاني، ثم يسكب نصف الماء من الكوب الثاني في الثالث، وأخيراً يسكب نصف الماء من الكوب الثالث في الأول، ما هي النسبة المئوية لامتلاء الكوب الأول بالماء في النهاية؟



- (A) 56.5% (B) 58.5% (C) 60.5% (D) 62.5% (E) 64.5%

Question 6:

Hamza listed the first 20 positive integers that are *not divisible by either 2 or 3* in increasing order. The sequence begins with the numbers below. Determine the 20th term of this sequence.

قام حمزة بكتابة أول 20 عدداً صحيحاً موجباً التي لا تقبل القسمة على 2 أو 3 بترتيب تصاعدي، تبدأ المتتالية بالأعداد الظاهرة بالأسفل، حدد العدد العشرين في هذه المتتالية.

1, 5, 7, 11, 13, ...

- (A) 49 (B) 53 (C) 55 (D) 59 (E) 61

Question 7:

How many two-digit positive integers are there such that the units digits and the tens digits differ by at most 1?

كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من خانتين بحيث لا يزيد الفرق بين رقم الآحاد ورقم العشرات عن 1؟

- (A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 26 (E) 27

Question 8:

At a party, 36 pieces of chocolate, 18 cakes, and 24 candies are to be divided equally among children (using all items, with each child receiving the same number of each item). What is the greatest possible number of children?

في حفلة ما، ستقسم 36 قطعة شوكولاتة و 18 كعكة و 24 قطعة حلوى بالتساوي بين الأطفال (باستخدام جميع الأصناف، وبحيث يحصل كل طفل على العدد نفسه من كل صنف)، ما هو أكبر عدد ممكن من الأطفال الحاضرين؟

- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12

Question 9:

A contest contains 30 problems. Each correct answer is worth 4 points, and 1 point is deducted for each incorrect answer. No points are given for unanswered problems. Salma scored 86 points and left exactly one problem unanswered. How many problems did she answer incorrectly?

تحتوي مسابقة على 30 سؤالاً، كل إجابة صحيحة تساوي 4 نقاط، ويتم خصم نقطة واحدة لكل إجابة خاطئة. لا تُعطى أي نقاط للأسئلة التي لم تتم الإجابة عليها، حصلت سلمى على 86 نقطة وتركت سؤالاً واحداً بالضبط دون إجابة، ما عدد الأسئلة التي أجابت عنها بشكل خاطئ؟

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Question 10:

Maryam has five banknotes, valued 1, 5, or 10 riyals. She has at least one banknote from each of the three values. Given that the total value of these banknotes is 22 riyals, how many 5-riyal notes does she have?

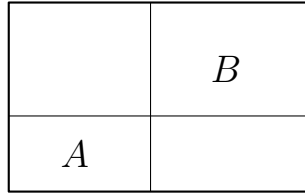
مع مريم خمس أوراق نقدية من فئات 1 و 5 و 10 ريالاً. لديها ورقة واحدة على الأقل من كل فئة. إذا كان مجموع قيمة هذه الأوراق 22 ريالاً، فما عدد الأوراق التي لديها من فئة 5 ريالاً؟

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Question 11:

A rectangle is divided into 4 smaller rectangles, see below. The perimeters of rectangles *A* and *B* are 10 cm and 20 cm, respectively. Find the perimeter of the large rectangle.

قسّم مستطيل إلى 4 مستطيلات أصغر كما في الشكل أدناه، محيط المستطيلين *A* و *B* هو 10 سم و 20 سم على الترتيب، فأوجد محيط المستطيل الكبير.

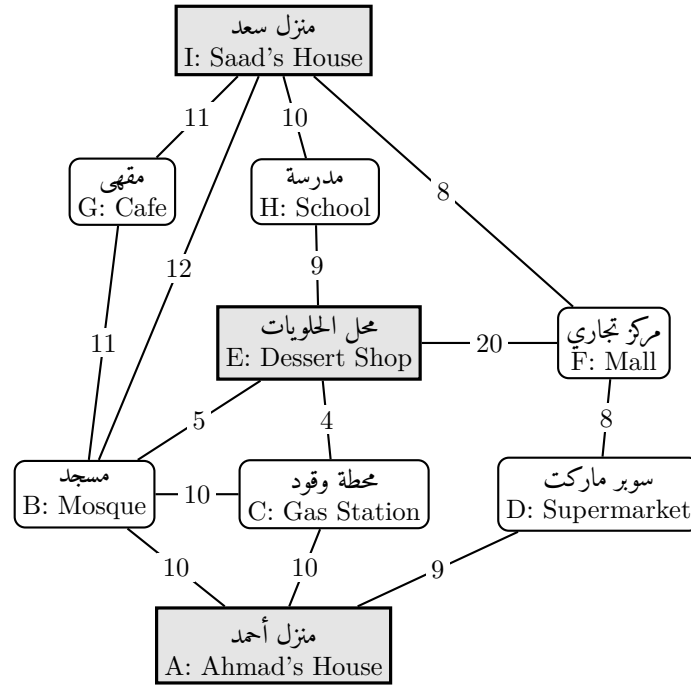


- (A) 20 cm (B) 30 cm (C) 40 cm (D) 50 cm (E) 60 cm

Question 12:

Saad invited Ahmad for Iftar. Ahmad wants to stop at a dessert shop first. Using the map showing travel times between locations, determine when Ahmad arrives at Saad's house if he leaves 30 minutes before Iftar and takes the fastest route via the dessert shop.

دعا سعد أحمد إلى وجبة إفطار، يريد أحمد التوقف عند محل الحلويات أولاً، باستخدام الخريطة التي توضح أوقات التنقل بين المواقع، حدد متى يصل أحمد إلى منزل سعد إذا غادر قبل وقت الإفطار بـ 30 دقيقة وسلك أسرع طريق يمر بمحل الحلويات.



- (A) 8 minutes before Iftar
 (B) 3 minutes before Iftar
 (C) 1 minute after Iftar
 (D) 2 minutes after Iftar
 (E) 3 minutes after Iftar

- 8 دقائق قبل الإفطار.
 3 دقائق قبل الإفطار.
 دقيقة واحدة بعد الإفطار.
 دقيقتان بعد الإفطار.
 3 دقائق بعد الإفطار.

Question 13:

How many three-digit numbers consist of digits 1, 2, 3, 4, 5, 6 and contain the digit 3 (digits may repeat)?

كم عدد من ثلاثة خانات يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6 ويحتوي على الرقم 3 (يمكن تكرار الأرقام)؟

- (A) 90 (B) 91 (C) 92 (D) 93 (E) 94

Question 14:

When Asmaa makes a small cup of coffee, she uses 12 g of coffee beans with 200 mL of hot water. For a large cup, she uses 20 g of coffee beans with 300 mL of hot water. How much more coffee per milliliter of water does the large cup have compared with the small cup?

عندما تُحضّر أسماء كوباً صغيراً من القهوة، فإنها تستخدم 12 غ من البن مع 200 مل من الماء الساخن، أما لتحضير كوب كبير، فإنها تستخدم 20 غ من البن مع 300 مل من الماء الساخن، ما مقدار الزيادة في نسبة القهوة لكل مليلتر من الماء في الكوب الكبير مقارنة بالكوب الصغير؟

- (A) $\frac{1}{150}$ (B) $\frac{1}{30}$ (C) $\frac{3}{50}$ (D) $\frac{1}{15}$ (E) $\frac{5}{3}$

Question 15:

The numerator and the denominator of a fraction are positive integers whose sum is 2025. The value of this fraction is less than $\frac{1}{3}$. What is the greatest such fraction?

عدد كسري بسطه ومقامه هما عدداً صحيحان موجبان مجموعهما 2025 ، قيمة هذا الكسر أقل من $\frac{1}{3}$ ، ما هو أكبر كسر يحقق هذه الشروط؟

- (A) $\frac{506}{1519}$ (B) $\frac{507}{1518}$ (C) $\frac{511}{1514}$ (D) $\frac{512}{1513}$ (E) $\frac{513}{1512}$

Question 16:

For positive numbers x, y, z, t , the following relationship holds. What is the correct ordering of the numbers?

للأعداد الموجبة x, y, z, t ، تنطبق العلاقة أدناه، ما هو الترتيب الصحيح للأعداد؟

$$x^2 = y^3 = \sqrt{z} = \frac{1}{t} > 1$$

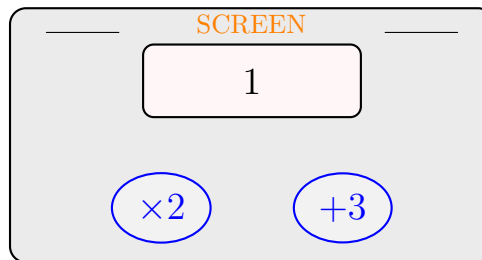
- (A) $t < y < x < z$ (B) $t < x < y < z$ (C) $y < x < t < z$ (D) $t < z < y < x$
 (E) $z < y < x < t$

Question 17:

A machine has two buttons, $\boxed{\times 2}$ and $\boxed{+3}$, and a screen showing a number. The left button multiplies the number on the screen by 2, and the right button adds 3 to it. For example, after pressing $\boxed{+3}$ and then $\boxed{\times 2}$, the number 1 on the screen becomes 8, because $1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{\times 2} 8$.

Starting from 1, how many different numbers are possible to get after three presses?

تحتوي آلة على زرین $\boxed{\times 2}$ و $\boxed{+3}$ وشاشة تعرض عدداً، الزر الأيسر يضاعف العدد الظاهر على الشاشة بـ 2، بينما الزر الأيمن يضيف 3 إلى العدد الظاهر على الشاشة. على سبيل المثال، عند الضغط على $\boxed{+3}$ ثم $\boxed{\times 2}$ ، فإن الرقم 1 على الشاشة يصبح 8، لأن $1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{\times 2} 8$. بدءاً من العدد 1، كم عدداً مختلفاً يمكن الحصول عليه بعد ثلاث ضغطات؟

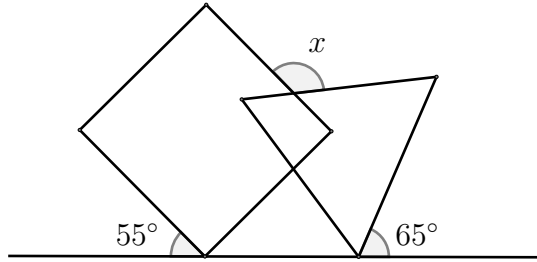


- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Question 18:

A square and an equilateral triangle were drawn as shown below. What is the measure of the angle x ?

رُسم مربع ومثلث متطابق الأضلاع كما في الشكل أدناه، ما قياس الزاوية x ؟



- (A) 100° (B) 105° (C) 110° (D) 115° (E) 120°

Question 19:

Ali is creating a 5-digit password (with no zeros) such that each digit is equal to the sum of all digits to its right. What is the sum of the digits in the password?

يصنع علي كلمة مرور مكونة من 5 خانات (بدون أصفار) بحيث يكون كل رقم مساوياً لمجموع جميع الأرقام التي على يمينه، ما هو مجموع أرقام الخانات في كلمة المرور؟

- (A) 5 (B) 9 (C) 15 (D) 16 (E) 45

Question 20:

Evaluate the sum:

أوجد قيمة المجموع:

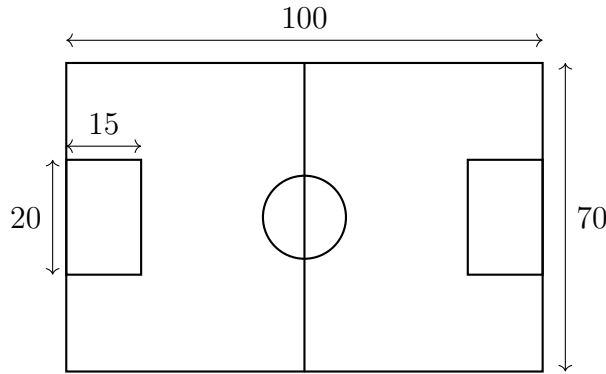
$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots + 1445 + 1446 - 1447$$

- (A) -1448 (B) -1447 (C) -2 (D) 0 (E) 1447

Question 21:

A football field was painted to mark its boundaries, as shown in the figure. Based on the labeled lengths in the diagram, what is the radius (in meters) of the circle if a total of 570 meters was painted?

تم طلاء ملعب كرة قدم لتحديد شكله كما هو موضح في الشكل، بناءً على الأطوال الموضحة في الرسم، ما هو نصف قطر الدائرة (بالأمتار) إذا كان إجمالي طول ما تم طلاؤه 570 متراً؟ (لاحظ أن $\pi = 3.14$)

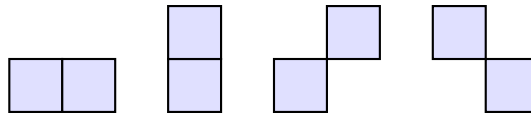


- (A) $\frac{10}{\pi}$ (B) $\frac{30}{\pi}$ (C) $\frac{35}{\pi}$ (D) $\frac{45}{\pi}$ (E) $\frac{65}{\pi}$

Question 22:

How many ways are there to mark two cells of a 7×7 grid square that have a common side or a common vertex (see below)?

كم عدد الطرق لاختيار خليتين في شبكة 7×7 بحيث يكون لهما ضلع مشترك أو رأس مشترك (انظر أدناه)؟



- (A) 150 (B) 152 (C) 154 (D) 156 (E) 158

Question 23:

There are two sisters, Fatimah and Samira. The age of Fatimah is one of the numbers $10, 11, \dots, 20$, and the age of Samira is one of the numbers $27, 28, 29$. The product of their ages is the square of an integer. What is the sum of their ages?

فاطمة وسميرة أختان، عمر فاطمة هو أحد الأعداد $10, 11, \dots, 20$ ، وعمر سميرة هو أحد الأعداد $27, 28, 29$ ، حاصل ضرب عمريهما هو مربع كامل لعدد صحيح، فما مجموع عمريهما؟

- (A) 36 (B) 37 (C) 38 (D) 39 (E) 40

Question 24:

Let a, b, c be non-zero real numbers which satisfy:

$$a + \frac{1}{b} = 2, \quad b + \frac{1}{c} = 3, \quad c + \frac{1}{a} = 4.$$

What is the value of the following expression?

إذا كانت a, b, c أعداداً حقيقية غير صفرية، بحيث:
 $a + \frac{1}{b} = 2, \quad b + \frac{1}{c} = 3, \quad c + \frac{1}{a} = 4$
 فما قيمة العبارة التالية؟

$$abc + \frac{1}{abc}$$

- (A) 9 (B) 15 (C) 18 (D) 21 (E) 24

Seniors Track Questions-First Round

أسئلة مسار الشباب - المرحلة الأولى

Question 1:

If we increase the length of each side of a cube by 100 percent, by what percent does the volume increase?

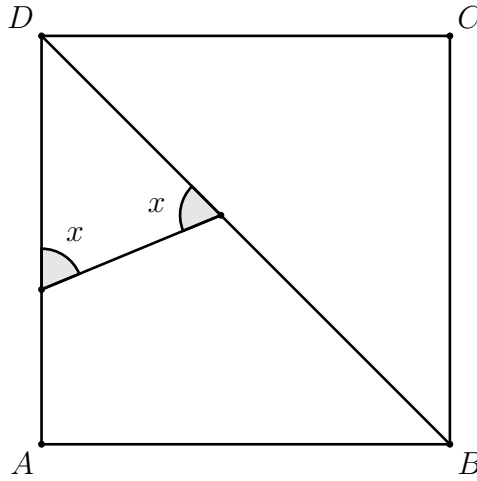
إذا زاد طول كل ضلع من أضلاع مكعب بنسبة 100%، كم نسبة الزيادة في حجم المكعب؟

- (A) 100% (B) 200% (C) 400% (D) 700% (E) 800%

Question 2:

The figure shows square $ABCD$. What is the value of x ?

يُبين الشكل المربع $ABCD$ ، ما هي قيمة x ؟



- (A) 45° (B) 60° (C) 67.5° (D) 72.5° (E) 75°

Question 3:

Ali starts the week with 3 white shirts, 2 green shirts, 4 black shorts, and 1 gray short. On Day 1, he wears a white shirt and black shorts. Assuming he doesn't wear clothes again, what is the probability he randomly selects a white shirt and black shorts on Day 2?

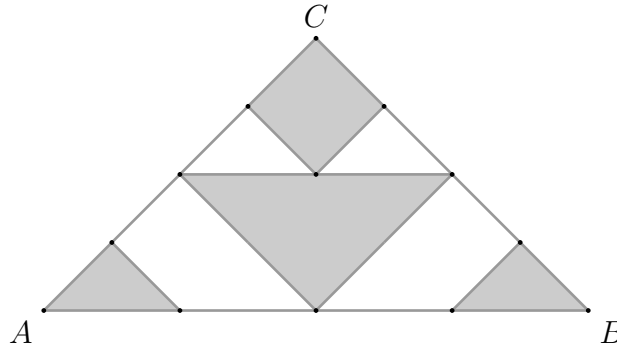
يبدأ علي الأسبوع ولديه 3 قمصان بيضاء و قميصان أخضران و 4 سراويل سوداء و سراويل رمادي واحد، في اليوم الأول، ارتدى قميصاً أبيض و سراوياً أسود، بافتراض أنه لا يعيد ارتداء الملابس، ما هو احتمال أن يختار عشوائياً قميصاً أبيض و سراوياً أسود في اليوم الثاني؟

- (A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{12}{25}$

Question 4:

The figure shows a triangle ABC that is subdivided into several polygons. Points placed on the sides of triangle ABC divide each side into four equal segments. Determine what fraction of the total area of triangle ABC is shaded.

يُبين الشكل المثلث ABC المقسم إلى عدة مضلعات، النقاط الموضوعة على أضلاع المثلث ABC تُقسم كل ضلع إلى أربع قطع متساوية، أوجد الكسر الذي تُمثله المساحة المظللة من المساحة الكلية للمثلث ABC .



- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$ (E) $\frac{3}{4}$

Question 5:

Determine the value of:

احسب قيمة:

$$3 \cdot \frac{1}{37} + 2 \cdot \frac{36}{37} + \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} + \left(\frac{36}{37}\right)^2$$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Question 6:

How many four-digit numbers consisting of digits 1, 2, 4, 5 (digits cannot repeat) are divisible by 5 and greater than 2025?

كم عدد الأعداد المكونة من أربعة خانات باستخدام الأرقام 1, 2, 4, 5 (لا يمكن تكرار الأرقام) والتي تقبل القسمة على 5 وأكبر من 2025 ؟

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

Question 7:

The median of nine different integers is 12. After including the two numbers 13 and 16, what is the median of these eleven numbers?

الوسيط لـ 9 أعداد صحيحة مختلفة هو 12، بعد إضافة العددين 13 و 16، ما هو الوسيط للأعداد الأحد عشر؟

- (A) 12 (B) 12.5 (C) 13 (D) 14 (E) 16

Question 8:

If a new girl joins the math club but 20% of the boys leave it, the numbers of boys and girls would be equal. On the other hand, if one girl leaves the math club and then the number of girls increases by 30%, the numbers of boys and girls would also be equal. How many children are currently in the math club?

إذا انضمت فتاة جديدة إلى نادي الرياضيات وفي نفس الوقت غادر 20% من الفتيان، فسيصبح عدد الفتيان والفتيات متساوياً، في المقابل، إذا غادرت فتاة واحدة نادي الرياضيات ثم زاد عددهن بنسبة 30%، فسيكون عدد الفتيان والفتيات متساوياً أيضاً، كم عدد الأطفال الموجودين في نادي الرياضيات؟

- (A) 112 (B) 113 (C) 114 (D) 115 (E) 116

Question 9:

Let $f(5x) = \frac{5}{2+x}$. What is the value of $f(-5)$?

ليكن $f(5x) = \frac{5}{2+x}$ ، ما هي قيمة $f(-5)$ ؟

- (A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) 5 (E) 25

Question 10:

How many zeroes does the result of the following product contain?

كم صفراً يحتويه ناتج الضرب التالي؟

$$650 \times 4^6 \times 5^9$$

- (A) 0 (B) 1 (C) 9 (D) 10 (E) 11

Question 11:

Let $a = \frac{1 + \frac{1}{2024}}{2025}$, $b = \frac{1 + \frac{1}{2025}}{2026}$. What is the value of the following expression?

ليكن $a = \frac{1 + \frac{1}{2024}}{2025}$ و $b = \frac{1 + \frac{1}{2025}}{2026}$ ، ما هي قيمة التعبير التالي؟

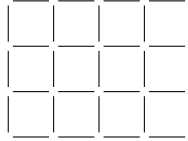
$$\frac{a + b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

- (A) $\frac{1}{2024 \cdot 2025}$ (B) $\frac{1}{2025 \cdot 2026}$ (C) $\frac{1}{2024 \cdot 2026}$ (D) $\frac{1}{2025^2}$ (E) $\frac{1}{2024^2}$

Question 12:

A 3×4 rectangle below consists of identical sticks. How many sticks do we need to construct a 40×50 rectangle?

يتكون مستطيل 3×4 أدناه من أعواد متطابقة، كم عدد الأعواد التي نحتاجها لبناء مستطيل 40×50 ؟



- (A) 1600 (B) 2500 (C) 4090 (D) 4100 (E) 4150

Question 13:

For $x = -1234567$, what is the value of the following expression?

ليكن $x = -1234567$ ، ما هي قيمة التعبير التالي؟

$$\sqrt{100 - 20x + x^2} - \sqrt{x^2}$$

- (A) 0 (B) 10 (C) -10 (D) -2469124 (E) 2469124

Question 14:

A rectangle is divided into 9 smaller rectangles, see below. The perimeters of rectangles A, B, C are 10 cm, 20 cm, 30 cm, respectively. Find the perimeter of the large rectangle.

في الشكل أدناه، قُسم مستطيل إلى 9 مستطيلات أصغر، ومحيطات المستطيلات A و B و C هي 10 سم و 20 سم و 30 سم على التوالي، أوجد محيط المستطيل الكبير.

	B	
		C
A		

- (A) 40 cm (B) 50 cm (C) 60 cm (D) 70 cm (E) 80 cm

Question 15:

What is the largest of the following numbers?

ما هو أكبر الأعداد التالية؟

- (A) 2^{2025} (B) 4^{1014} (C) $(\sqrt{2})^{4044}$ (D) $(2\sqrt{2})^{1010}$ (E) $(\sqrt[3]{4})^{3030}$

Question 16:

What is the largest possible value of $a^b + c^d$, where a, b, c , and d are different elements of the set $\{1, 2, 3, 4\}$?

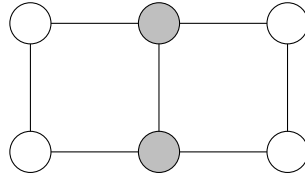
ما هي أكبر قيمة ممكنة لـ $a^b + c^d$ ، حيث a و b و c و d عناصر مختلفة من المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ ؟

- (A) 65 (B) 66 (C) 82 (D) 83 (E) 84

Question 17:

Each circle below contains one number from 2, 3, 4, 5, 6, 7 and each number is used once. The product of the numbers at the four vertices of the left square is equal to the product of the numbers at the four vertices of the right square. Find the sum of the two numbers in the shaded circles.

كل دائرة أدناه تحتوي على عدد واحد من الأعداد 2, 3, 4, 5, 6, 7، ويُستخدم كل عدد مرة واحدة فقط، حاصل ضرب الأعداد الموجودة عند الرؤوس الأربعة للمربع الأيسر يساوي حاصل ضرب الأعداد الموجودة عند الرؤوس الأربعة للمربع الأيمن، أوجد مجموع العددين الموجودين في الدائرتين المظلتين.



- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

Question 18:

Evaluate the following product:

احسب حاصل الضرب التالي:

$$(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - 1).$$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) $4\sqrt[3]{2} - 1$ (E) $2\sqrt[3]{4} + 1$

Question 19:

Bader, Nawaf, and Yasser each chose a positive integer. Each person multiplied his number by each of the other two numbers, then subtracted the smaller product from the larger product. Bader's result was 1, and Nawaf's result was 49. What was Yasser's result?

اختار كل من بدر ونواف وياسر عدداً صحيحاً موجباً، قام كل واحد منهم بضرب عدده في كلٍّ من العددين اللذين اختارهما الآخران، ثم طرح الناتج الأصغر من الناتج الأكبر، كانت نتيجة بدر 1، ونتيجة نواف 49، ما هي نتيجة ياسر؟

- (A) 27 (B) 82 (C) 48 (D) 36 (E) 54

Question 20:

How many integer numbers k satisfy the following inequality?

كم عدد صحيح k يحقق المتباينة التالية؟

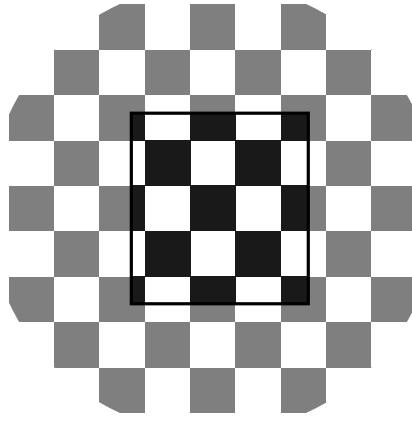
$$(k + 10)(4 - k)(k - 2)^2 > 0$$

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Question 21:

We have a checkered tablecloth in which the sidelength of small squares is 1. A rectangle is cut from this tablecloth such that the sides of the rectangle are parallel to the sides of the squares, as shown in the figure. The total area of the white part of the rectangle is 10. What is the perimeter of the rectangle?

لدينا غطاء طاولة مقسم إلى مربعات (يشبه رقعة الشطرنج) طول ضلع كل مربع صغير 1، تم قص مستطيل أضلاعه موازية لأضلاع المربعات، كما هو موضح في الشكل، المساحة الإجمالية للجزء الأبيض من المستطيل هي 10، ما هو محيط هذا المستطيل؟



- (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

Question 22:

Khalid wants to increase one of the numbers in the product $1447 \times 1448 \times 2025 \times 2030$ by adding 1 (he can increase either 1447, 1448, 2025, or 2030). Which number should he increase to make the new product as large as possible?

يريد خالد زيادة أحد الأرقام في حاصل الضرب $1447 \times 1448 \times 2025 \times 2030$ بإضافة 1 (يمكنه زيادة 1447 أو 1448 أو 2025 أو 2030)، ما هو الرقم الذي يجب أن يزيد ليحصل حاصل الضرب الجديد أكبر ما يمكن؟

- (A) 1447 (B) 1448 (C) 2025 (D) 2030 (E) It doesn't matter which number is increased.

Question 23:

For a two-digit number n , both $154 - n$ and $89 - n$ are prime numbers. Find the sum of the digits of n .

إذا كان n عدداً مكوناً من خانتين وكان كل من $154 - n$ و $89 - n$ عدداً أولياً، أوجد مجموع أرقام العدد n .

- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

Question 24:

Let $f(x) = (ax^2 + x + 3)(ax^2 + x + 5)$. If $f(-3) = -1$ what is the value of $f(3)$?

ليكن $f(x) = (ax^2 + x + 3)(ax^2 + x + 5)$ ، إذا كان $f(-3) = -1$ ما هي قيمة $f(3)$ ؟

- (A) 1 (B) 3 (C) 7 (D) 15 (E) 35

Question 25:

Two integer numbers were added to the list $[2, 2, 9, 15, 32]$ so that the range doubled, while the average remained unchanged. What is the larger of the two added numbers?

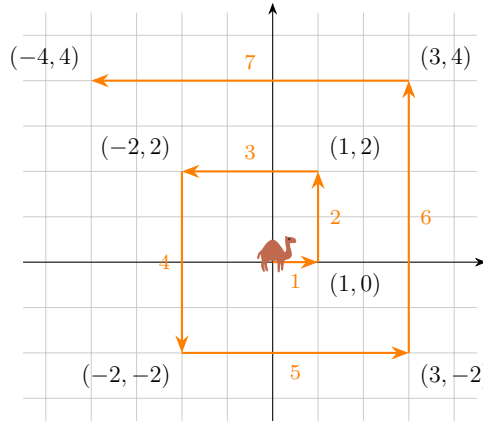
أضيف عددين صحيحين إلى القائمة $[2, 2, 9, 15, 32]$ بحيث تضاعف المدى بينما لم يتغير المتوسط الحسابي، ما هو أكبر العددين المضافين؟

- (A) 42 (B) 44 (C) 46 (D) 48 (E) 50

Question 26:

A camel starts at $(0, 0)$ and moves as follows: It moves 1 unit right, 2 units up, 3 units left, 4 units down, then continues 5 units right, 6 units up, ... (the first seven moves are shown below). Find its coordinates after the 2025th move.

يبدأ جمل عند النقطة $(0, 0)$ ويتحرك كالتالي: يتحرك وحدة واحدة يميناً، ثم وحدتين للأعلى، ثم 3 وحدات يساراً، ثم 4 وحدات للأسفل، ثم يكمل 5 وحدات يميناً، ثم 6 وحدات للأعلى، وهكذا... (يظهر أدناه أول سبع حركات)، أوجد إحداثياته بعد الحركة رقم 2025.



- (A) $(1013, -1012)$ (B) $(1014, -1013)$ (C) $(2025, -2024)$ (D) $(2026, -2025)$
(E) None of the above

Question 27:

Positive real numbers x , y , and t satisfy the following system. What is the value of t ?

الأعداد الحقيقية الموجبة x و y و t تحقق النظام التالي، ما هي قيمة t ؟

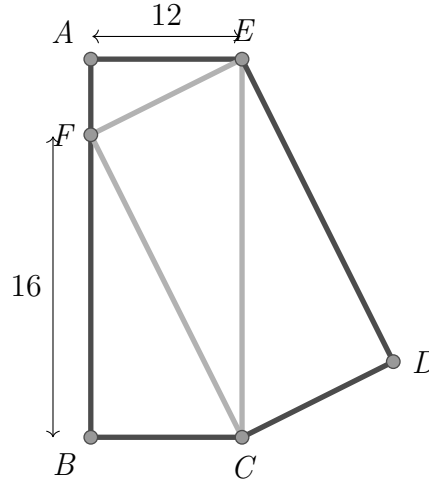
$$\begin{cases} x^2 = y^2 + 6 \\ (x + y)(t - 1) = 30 \\ (x - y)(t + 1) = 16 \end{cases}$$

- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 80 (E) 81

Question 28:

In the figure, pentagon $ABCDE$ is formed by two overlapping rectangles. Based on the labeled lengths in the diagram, what is the perimeter of the pentagon?

في الشكل أدناه، الشكل الخماسي $ABCDE$ مكون من مستطيلين متداخلين، بناءً على الأطوال الموضحة في الرسم، ما هو محيط الشكل الخماسي؟



(A) 70

(B) 72

(C) 74

(D) 84

(E) 109

Question 29:

Let a and b be positive integers such that exactly three of the following statements are true and one is false:

- (1) $a + 7$ is divisible by b .
- (2) $a = 5b + 2$.
- (3) $a + b$ is divisible by 3.
- (4) $a + 4b$ is a prime number.

Find the largest possible value of $a + b$.

ليكن a و b عدداً صحيحان موجبان بحيث أن ثلاث عبارات بالضبط من العبارات التالية صحيحة وواحدة فقط خاطئة:

(1) $a + 7$ يقبل القسمة على b .

(2) $a = 5b + 2$.

(3) $a + b$ يقبل القسمة على 3.

(4) $a + 4b$ عدد أولي.

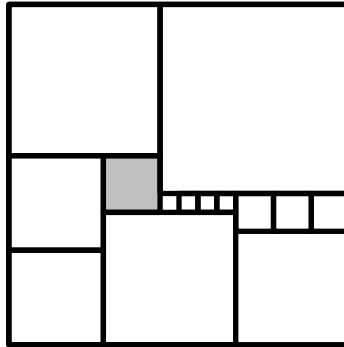
أوجد أكبر قيمة ممكنة للـ $a + b$.

- (A) 8 (B) 20 (C) 48 (D) 56 (E) 72

Question 30:

A square of sidelength 1 is dissected into 14 smaller squares, see below. Find the area of the shaded square.

مربع طول ضلعه 1 قُسم إلى 14 مربعاً أصغر، (كما موضح أدناه) أوجد مساحة المربع المظلل.



- (A) $\frac{1}{49}$ (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{1}{25}$ (D) $\frac{1}{18}$ (E) $\frac{1}{12}$

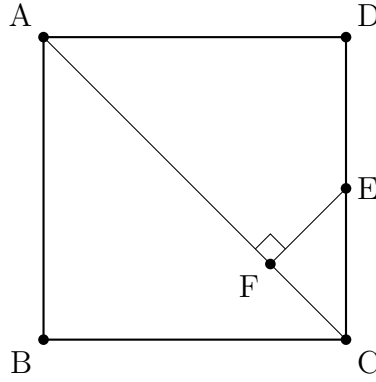
Juniors Track Questions-Second Round

أسئلة مسار الناشئين - المرحلة الثانية

Question 1:

In the figure below, $ABCD$ is a square with side length 2. E is the midpoint of CD and F lies on AC such that $EF \perp AC$. Find the length of AF .

في الشكل أدناه، $ABCD$ مربع طول ضلعه 2، E هي نقطة منتصف CD ، والنقطة F تقع على AC بحيث يكون $EF \perp AC$. أوجد طول AF .



Question 2:

Find the values of x and y that solve the following system of equations:

أوجد قيم x و y التي تحقق نظام المعادلات التالي:

$$\begin{cases} \frac{x - 2025}{x - 2026} = \frac{y - 1447}{y - 1448} \\ x(y + 13) = y(x + 30) \end{cases}$$

Question 3:

Find the number of triples (x, y, z) of integers satisfying the following inequality:

أوجد عدد الثلاثيات (x, y, z) من الأعداد الصحيحة التي تحقق المتباينة التالية:

$$x^2 + 2|y| + 3^{|z|} \leq 8.$$

Question 4:

Let $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{15} = 144$ be all the positive divisors of 144. Find the sum

$$\frac{1}{d_1 + 12} + \dots + \frac{1}{d_{15} + 12}$$

as a fraction in its simplest form.

لتكن $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{15} = 144$ جميع القواسم الموجبة للعدد 144. أوجد المجموع

$$\frac{1}{d_1 + 12} + \dots + \frac{1}{d_{15} + 12}$$

في صورة كسر على أبسط صورة.

Question 5:

Each of the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 is placed exactly once into the equality squares

$$\square\square + \square\square + \square + \square + \square = \square\square$$

so that the equation holds. Here, $\square\square$ means a two-digit number and $\square$ means a one-digit number. Find all possible values of the two-digit number on the right-hand side of equality.

يتم وضع كل من الأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 مرة واحدة بالضبط في المربعات أدناه

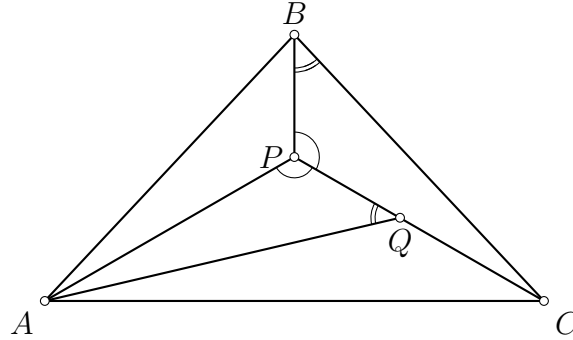
$$\square\square + \square\square + \square + \square + \square = \square\square$$

بحيث تتحقق المعادلة، (هنا، $\square\square$ يمثل عدداً مكوناً من خانتين و $\square$ يمثل عدداً مكوناً من خانة واحدة) أوجد جميع القيم الممكنة للعدد المكون من خانتين في الطرف الأيمن من المساواة.

Question 6:

In the diagram below, point Q lies on segment PC such that $\triangle APQ$ and $\triangle CPB$ are congruent triangles. Let $\angle BAC = \angle BCA = 37^\circ$. Find $\angle PAQ$.

في الشكل أدناه، النقطة Q تقع على القطعة المستقيمة PC بحيث يكون المثلثان $\triangle APQ$ و $\triangle CPB$ متطابقين، ليكن $\angle BAC = \angle BCA = 37^\circ$ ، أوجد قياس الزاوية $\angle PAQ$.

**Question 7:**

More than 39 %, but less than 40 % of the members of a chess club are boys. If one of the girls decided to leave the club, the percentage of boys would still be under 40 %, but if a new boy joined the club instead, the percentage would be at least 40 %. What is the smallest possible number of current members of the club?

أكثر من 39% ، ولكن أقل من 40% من أعضاء نادي الشطرنج هم من الأولاد. إذا قررت إحدى الفتيات مغادرة النادي، فستظل نسبة الأولاد أقل من 40% ، ولكن إذا انضم ولد جديد إلى النادي بدلاً من ذلك، فستكون النسبة 40% على الأقل. ما هو أصغر عدد ممكن للأعضاء الحاليين في النادي؟

Question 8:

The sum of 15 distinct numbers chosen from a set of 17 consecutive integers is 2026. Find all possible sets of such 17 consecutive integers.

لدينا 17 عدد صحيح متتالي، اختير منها 15 عدداً مختلفاً مجموعهم 2026. أوجد جميع القيم الممكنة لهذه المجموعة المكونة من 17 عدد صحيح متتالي.

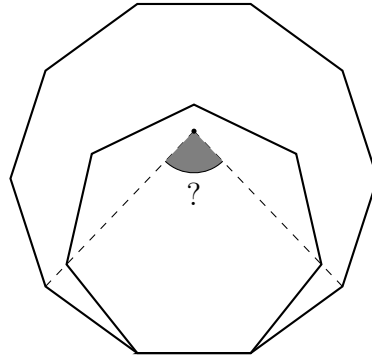
Seniors Track Questions-Second Round

أسئلة مسار الشباب - المرحلة الثانية

Question 1:

In the figure below, we have two regular polygons. What is the measure of the shaded angle?

في الشكل أدناه، لدينا مضلعين منتظمين، ما هو قياس الزاوية المظلمة؟



Question 2:

Find all solutions x of:

أوجد جميع الحلول x للمعادلة:

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{4x-11} = 1$$

Question 3:

Let $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ denote the sum of the first n perfect squares. Recall that this sum is given by the formula: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Jumana lists, in increasing order, all positive integers n for which S_n is divisible by 7. The sequence begins 3, 6, 7, $\dots$. What is the 2026th number in her list?

ليكن $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ هو مجموع أول n من المربعات الكاملة، نعرف أن هذا المجموع يُعطى أيضاً بالقاعدة: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. قامت جمانة بكتابة جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n (بالترتيب التصاعدي) بحيث S_n يقبل القسمة على 7، تبدأ المتتالية بـ 3, 6, 7, $\dots$ ، ما هو العدد الذي ترتيبه 2026 في قائمتها؟

Question 4:

The floor function of x , denoted by $\lfloor x \rfloor$, is the greatest integer less than or equal to x . For example, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$, and $\lfloor 2 \rfloor = 2$. Compute:

دالة الجزء الصحيح للعدد x ، ويُرمز لها بـ $\lfloor x \rfloor$ ، هي أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x ، على سبيل المثال، $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$ و $\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$ و $\lfloor 2 \rfloor = 2$ ، احسب قيمة:

$$\sum_{n=1}^{2026} \left\lfloor \frac{(2n+1)^2}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{25}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{49}{9} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{4053^2}{2026^2} \right\rfloor.$$

Question 5:

Find the digit corresponding to every letter in the sum:

$$\begin{array}{r} SHAPE \\ + IDEAS \\ \hline KAUST \end{array}$$

given that distinct letters refer to distinct digits, $S < H < A < P < E$, and $K > A > U > S > T$.

أوجد الرقم المقابل لكل حرف في المجموع التالي:

$$\begin{array}{r} SHAPE \\ + IDEAS \\ \hline KAUST \end{array}$$

علماً بأن الحروف المختلفة تمثل أرقاماً مختلفة من 0 إلى 9، و $S < H < A < P < E$ ، و $K > A > U > S > T$.

Question 6:

Let $\triangle ABC$ be a triangle and D be a point inside it such that $\angle DBC = \angle BCA$ and $\angle DCB = \angle BAC$. A line passing through D and parallel to BC intersects AB at E and AC at F . Given that $DB = 3$, $BC = 6$, and the area of $\triangle DBC$ is 8, calculate the area of $\triangle AEF$.

ليكن $\triangle ABC$ مثلثاً، و D نقطة بداخله بحيث $\angle DBC = \angle BCA$ و $\angle DCB = \angle BAC$ ، يمر مستقيم عبر D ويوازي BC ليقطع AB في E و AC في F ، إذا كان $DB = 3$ و $BC = 6$ ومساحة المثلث $\triangle DBC$ هي 8، فاحسب مساحة المثلث $\triangle AEF$.

Question 7:

A *multiplicative triangle* is a triangular array of positive integers in which the product of any two adjacent numbers in a row equals the number directly above them. The following is an example of a multiplicative triangle of size 4 starting with 960:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 960 & & \\
 & & & 12 & & 80 & \\
 & & 3 & & 4 & & 20 \\
 3 & & 1 & & 4 & & 5
 \end{array}$$

Find the number of multiplicative triangles of size 5 starting with 2025.

"المثلث الضربي" هو ترتيبية مثلثية من الأعداد الصحيحة الموجبة، يكون فيها حاصل ضرب أي عددين متجاورين في صف ما مساوياً للعدد الموجود فوقهما مباشرة، فيما يلي مثال لمثلث ضربي من الحجم 4 يبدأ بالعدد 960:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 960 & & \\
 & & & 12 & & 80 & \\
 & & 3 & & 4 & & 20 \\
 3 & & 1 & & 4 & & 5
 \end{array}$$

أوجد عدد المثلثات الضربية من الحجم 5 والتي تبدأ بالعدد 2025.

Question 8:

Let a, b, c be distinct real numbers such that $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 3$. What is the largest possible value of $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$?

لتكن a, b, c أعداداً حقيقية مختلفة بحيث $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 3$ ، ما هي أكبر قيمة ممكنة لـ $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ ؟

Juniors Track Answer Key - First Round

إجابات مسار الناشئين - المرحلة الأولى

1. D	13. B
2. D	14. A
3. D	15. A
4. B	16. A
5. D	17. C
6. D	18. E
7. D	19. D
8. C	20. D
9. E	21. B
10. B	22. D
11. B	23. D
12. C	24. B

Seniors Track Answer Key - First Round

إجابات مسار الشباب - المرحلة الأولى

1. D	16. D
2. C	17. D
3. D	18. B
4. C	19. C
5. B	20. C
6. A	21. D
7. C	22. A
8. E	23. C
9. D	24. E
10. E	25. A
11. A	26. A
12. C	27. B
13. B	28. D
14. C	29. D
15. B	30. B

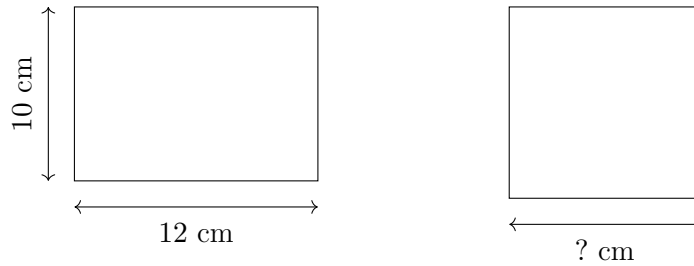
Solutions to Juniors Track Questions-First Round

حلول أسئلة مسار الناشئين - المرحلة الأولى

Question 1

The sides of a rectangle are 10 cm and 12 cm. A square has the same perimeter as this rectangle. What is the length of a side of the square?

أطوال أضلاع مستطيل هي 10 سم و 12 سم، ومربع له نفس محيط هذا المستطيل، ما طول ضلع المربع؟



Solution to Question 1:

Perimeter of the rectangle is $2(10+12) = 44$ cm. Then the side of the square is $44 : 4 = 11$ cm, because they have the same perimeter.

حل السؤال 1:

محيط المستطيل هو $2(10 + 12) = 44$ إذا طول ضلع المربع هو $11 = \frac{44}{4}$ سم لأن لديهم نفس المحيط.



Solution link



رابط الحل

Question 2

In which of the following numbers is the number of odd digits even?

في أي من الأعداد التالية يكون عدد الخانات الفردية زوجياً؟

Solution to Question 2:

In 12435, we have three odd digits, i.e., 1, 3, 5. In 821563, we have three odd digits, i.e., 1, 5, 3. In 95819632, we have five odd digits, i.e., 9, 5, 1, 9, 3. In 80753941, we have five odd digits, i.e., 7, 5, 3, 9, 1. Finally, in 87556931, we have six odd digits, i.e., 7, 5, 5, 9, 3, 1.

حل السؤال 2:

في 12435 لدينا ثلاث خانات فردية وهي 1, 3, 5. وفي 821563 لدينا ثلاث خانات فردية وهي 1, 5, 3. وفي 95819632 لدينا خمس خانات فردية وهي 9, 5, 1, 9, 3. وفي 80753941 لدينا خمس خانات فردية وهي 7, 5, 3, 9, 1. وأخيراً في 87556931 لدينا ست خانات فردية وهي 7, 5, 5, 9, 3, 1، وهو عدد زوجي؛ إذاً العدد المطلوب هو 87556931.



Solution link



رابط الحل

Question 3

Ahmad usually takes 20 minutes to get to school. On the other hand, Khalid takes 30 minutes to get to school. On a certain day, Ahmad took 30% more time than usual to get to school, while Khalid took 15% less time than usual. Which of the following is correct?

عادةً ما يستغرق أحمد 20 دقيقة للوصول إلى المدرسة، في المقابل يستغرق خالد 30 دقيقة للوصول إلى المدرسة. في إحدى الأيام، استغرق أحمد وقتاً أطول بنسبة 30% من المعتاد للوصول إلى المدرسة، بينما استغرق خالد وقتاً أقل بنسبة 15% من المعتاد. أي العبارات التالية صحيحة؟

Solution to Question 3:

On that day, Ahmad takes $20 + (0.3) \cdot 20 = 26$ minutes to get to school. On the other hand, Khalid takes $30 - (0.15) \cdot 30 = 25.5$ minutes to get to school. Thus, Khalid arrives 0.5 minutes earlier.

حل السؤال 3:

في ذلك اليوم استغرق أحمد $20 + (0.3) \cdot 20 = 26$ دقيقة للوصول إلى المدرسة. ومن ناحية أخرى استغرق خالد $30 - (0.15) \cdot 30 = 25.5$ دقيقة للوصول إلى المدرسة. إذًا يصل خالد قبل أحمد بـ 0.5 دقيقة.



Solution link



رابط الحل

Question 4

Notebooks were made in three colors: red, gray, and blue. The number of red notebooks is six less than the total number of blue and gray notebooks. Also, the number of gray notebooks is ten less than the total number of red and blue notebooks. How many blue notebooks were made?

صُنعت دفاتر بثلاثة ألوان: أحمر ورمادي وأزرق، عدد الدفاتر الحمراء أقل بستة من مجموع الدفاتر الزرقاء والرمادية، و عدد الدفاتر الرمادية أقل بعشرة من مجموع الدفاتر الحمراء والزرقاء، كم عدد الدفاتر الزرقاء التي صُنعت؟

Solution to Question 4:

Let r , g , and b be the numbers of red, gray and blue notebooks, respectively. We then obtain the system of equations $r = g + b - 6$, $g = r + b - 10$. By adding the two relations and canceling r and g from both sides, we obtain $2b - 16 = 0$, hence $b = 8$.

حل السؤال 4:

لتكن r و g و b أعداد الدفاتر الحمراء والرمادية والزرقاء على الترتيب. عندئذ نحصل على نظام المعادلتين $r = g + b - 6$ و $g = r + b - 10$. بجمع العلاقتين وحذف r و g من طرفي المعادلة نحصل على $2b - 16 = 0$ ، ومنه $b = 8$.



Solution link

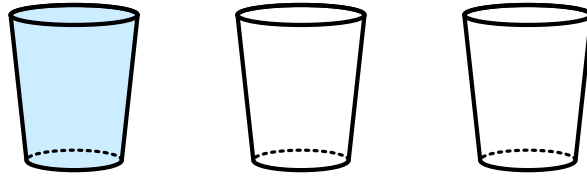


رابط الحل

Question 5

There are three cups on a table. The first cup is full of water; the other two are empty. Ali pours half of the water from the first cup into the second. Then he pours half of the water from the second cup into the third. Finally, he pours half of the water from the third cup into the first. What percentage of the first cup is filled with water at the end?

هناك ثلاثة أكواب على طاولة، الكوب الأول ممتلئ بالماء، والآخران فارغان، يسكب علي نصف الماء من الكوب الأول في الثاني، ثم يسكب نصف الماء من الكوب الثاني في الثالث، وأخيراً يسكب نصف الماء من الكوب الثالث في الأول، ما هي النسبة المئوية لامتلاء الكوب الأول بالماء في النهاية؟

**Solution to Question 5:**

At the beginning, the percentage of the water in the cups was $(100, 0, 0)$. Then we get the following,

$$(100, 0, 0) \rightarrow (50, 50, 0) \rightarrow (50, 25, 25) \rightarrow (62.5, 25, 12.5).$$

At the end, 62.5% of the first cup is filled with water.

حل السؤال 5:

في البداية كانت نسب الماء في الأكواب هي $(100, 0, 0)$. ثم نحصل على:

$$(100, 0, 0) \rightarrow (50, 50, 0) \rightarrow (50, 25, 25) \rightarrow (62.5, 25, 12.5).$$

في النهاية يكون 62.5% من الكوب الأول ممتلئاً بالماء.



Solution link



رابط الحل

Question 6

Hamza listed the first 20 positive integers that are *not divisible by either 2 or 3* in increasing order. The sequence begins with the numbers below. Determine the 20th term of this sequence.

قام حمزة بكتابة أول 20 عدداً صحيحاً موجباً التي لا تقبل القسمة على 2 أو 3 بترتيب تصاعدي، تبدأ المتتالية بالأعداد الظاهرة بالأسفل، حدد العدد العشرين في هذه المتتالية.

1, 5, 7, 11, 13, ...

Solution to Question 6:

Solution 1: The first 20 positive integers that are not divisible by 2 or 3 are:

1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59.

Hence, the 20th term is 59.

Solution 2: The terms of odd index and the terms of even index each separately form an arithmetic sequence with common difference 6 as follows:

1, 7, 13, 19, ...

5, 11, 17, 23, ...

For the 20th term of the sequence, we must look at the 10th term of the arithmetic sequence formed by the terms of even index, which is $5 - 1 \cdot 6 + 10 \cdot 6 = 59$, since 5 is the first term and 6 is the common difference.

Solution 3. Let n be the 20th number, and A_2 and A_3 be the sets of numbers from 1 to n that are divisible by 2 and 3, respectively. Then the total number of those that are not divisible by 2 or 3, is

$$n - |A_2 \cup A_3| = n - |A_2| - |A_3| + |A_2 \cap A_3| = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = 20.$$

Using $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, we get that the last expression is strictly between $\frac{n}{3} - 1$ and $\frac{n}{3} + 2$. This implies $54 < n < 63$ or $n = 55, 59, 61$. Only $n = 59$ satisfies the above equation.

حل السؤال 6:

الحل 1: أول 20 عدداً صحيحاً موجباً لا يقبل القسمة على 2 أو 3 هي:

1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59.

إذاً الحد الـ 20 هو 59.

الحل 2: تشكل حدود الرتبة الفردية وحدود الرتبة الزوجية كلٌّ على حدة متتالية حسابية فرقتها المشترك 6 كما يلي:

$$1, 7, 13, 19, \dots$$

$$5, 11, 17, 23, \dots$$

للحصول على الحد الـ 20 من المتتالية، ننظر إلى الحد الـ 10 من المتتالية الحسابية المكوّنة من حدود الرتب الزوجية، وهو $59 = 5 - 1 \cdot 6 + 10 \cdot 6$ ، لأن 5 هو الحد الأول و6 هو الفرق المشترك.

الحل 3: ليكن n هو العدد رقم 20 في هذه القائمة، ولتكن A_2 و A_3 مجموعتي الأعداد من 1 إلى n التي تقبل القسمة على 2 و3 على الترتيب. عندئذٍ يكون عدد الأعداد التي لا تقبل القسمة على 2 أو 3 هو

$$n - |A_2 \cup A_3| = n - |A_2| - |A_3| + |A_2 \cap A_3| = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor = 20.$$

وباستخدام $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ نجد أن التعبير الأخير يقع قطعاً بين $\frac{n}{3} - 1$ و $\frac{n}{3} + 2$. وهذا يعطي $54 < n < 63$ أي $n = 55, 59, 61$. والوحيد الذي يحقق المعادلة أعلاه هو $n = 59$.



Solution link



رابط الحل

Question 7

How many two-digit positive integers are there such that the units digits and the tens digits differ by at most 1?

كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من خانتين بحيث لا يزيد الفرق بين رقم الآحاد ورقم العشرات عن 1؟

Solution to Question 7:

Let the two-digit number be $\overline{ab}$ where a and b are the tens and the units digits. Then we have three cases:

- $a = b$, which gives the numbers 11, 22, 33, ..., 99 and they are 9 numbers.
- $a = b + 1$, which gives the numbers 10, 21, 32, ..., 98 and they are 9 numbers.
- $a + 1 = b$, which gives the numbers 12, 23, 34, ..., 89 and they are 8 numbers.

Thus, the final answer is $9 + 9 + 8 = 26$.

حل السؤال 7:

لنفرض أن العدد المكون من خانتين هو $\overline{ab}$ حيث a رقم العشرات و b رقم الآحاد. لدينا ثلاث حالات:

- $a = b$ ، فنحصل على الأعداد 11, 22, 33, ..., 99 وعددها 9.
- $a = b + 1$ ، فنحصل على الأعداد 10, 21, 32, ..., 98 وعددها 9.
- $a + 1 = b$ ، فنحصل على الأعداد 12, 23, 34, ..., 89 وعددها 8.

إذاً الجواب هو $9 + 9 + 8 = 26$.



Solution link



رابط الحل

Question 8

At a party, 36 pieces of chocolate, 18 cakes, and 24 candies are to be divided equally among children (using all items, with each child receiving the same number of each item). What is the greatest possible number of children?

في حفلة ما، ستُقسم 36 قطعة شوكولاتة و 18 كعكة و 24 قطعة حلوى بالتساوي بين الأطفال (باستخدام جميع الأصناف، وبحيث يحصل كل طفل على العدد نفسه من كل صنف)، ما هو أكبر عدد ممكن من الأطفال الحاضرين؟

Solution to Question 8:

The number of children must divide 36, 18, and 24 without remainder. Therefore the greatest possible number of children attending is $\gcd(36, 18, 24) = 6$.

حل السؤال 8:

يجب أن يكون عدد الأطفال قاسماً للأعداد 36 و 18 و 24 دون باقٍ. لذلك فإن أكبر عدد ممكن من الأطفال هو $\gcd(36, 18, 24) = 6$.



Solution link



رابط الحل

Question 9

A contest contains 30 problems. Each correct answer is worth 4 points, and 1 point is deducted for each incorrect answer. No points are given for unanswered problems. Salma scored 86 points and left exactly one problem unanswered. How many problems did she answer incorrectly?

تحتوي مسابقة على 30 سؤالاً، كل إجابة صحيحة تساوي 4 نقاط، ويتم خصم نقطة واحدة لكل إجابة خاطئة. لا تُعطى أي نقاط للأسئلة التي لم تتم الإجابة عليها، حصلت سلمى على 86 نقطة وتركت سؤالاً واحداً بالضبط دون إجابة، ما عدد الأسئلة التي أجابت عنها بشكل خاطئ؟

Solution to Question 9:

Let c be the number of her correct answers. Then, the number of incorrect answers is $30 - 1 - c = 29 - c$. The total score is given by:

$$4c - (29 - c) = 86$$

$$4c - 29 + c = 86$$

$$5c = 86 + 29$$

$$5c = 115$$

$$c = 115 : 5 = 23$$

Thus, Salma answered $30 - 1 - 23 = 6$ problems incorrectly.

حل السؤال 9:

ليكن c عدد الإجابات الصحيحة. إذا عدد الإجابات الخاطئة هو $c - 29 = 30 - 1 - c$. وتُعطى الدرجة الكلية بـ:

$$4c - (29 - c) = 86$$

$$4c - 29 + c = 86$$

$$5c = 86 + 29$$

$$5c = 115$$

$$c = 115 : 5 = 23$$

وبالتالي فإن سلمى أجابت عن $30 - 1 - 23 = 6$ أسئلة إجابةً خاطئة.



Solution link



رابط الحل

Question 10

Maryam has five banknotes, valued 1, 5, or 10 riyals. She has at least one banknote from each of the three values. Given that the total value of these banknotes is 22 riyals, how many 5-riyal notes does she have?

مع مريم خمس أوراق نقدية من فئات 1 و 5 و 10 ريالاً. لديها ورقة واحدة على الأقل من كل فئة. إذا كان مجموع قيمة هذه الأوراق 22 ريالاً، فما عدد الأوراق التي لديها من فئة 5 ريالاً؟

Solution to Question 10:

Let $a+1$, $b+1$, $c+1$ be the number of 1-riyal, 5-riyal, and 10-riyal banknotes, respectively, where a, b, c are non-negative integers. Since she has five banknotes, $a + b + c = 5 - (1 + 1 + 1) = 2$. Since the total value is 22 riyals, $a + 5b + 10c = 22 - (1 + 5 + 10) = 6$. The second equation reveals that $c = 0$, then the two equations $a + b = 2$ and $a + 5b = 6$ together imply $a = b = 1$. Hence, Maryam has $b + 1 = 2$ banknotes valued 5 riyals.

حل السؤال 10:

لتكن $a + 1$ و $b + 1$ و $c + 1$ أعداد الأوراق النقدية من فئات 1 و 5 و 10 ريالاً على الترتيب، حيث a, b, c أعداد صحيحة غير سالبة. بما أن معها خمس أوراق نقدية فإن $a + b + c = 5 - (1 + 1 + 1) = 2$. وبما أن مجموع قيمتها 22 ريالاً فإن $a + 5b + 10c = 22 - (1 + 5 + 10) = 6$. ومن المعادلة الثانية نستنتج أن $c = 0$ ، ثم إن المعادلتين $a + b = 2$ و $a + 5b = 6$ تعطينان $a = b = 1$. إذاً لدى مريم $b + 1 = 2$ ورقتان من فئة 5 ريالاً.



Solution link

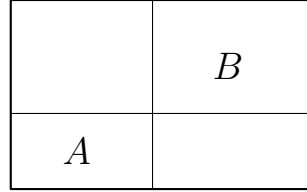


رابط الحل

Question 11

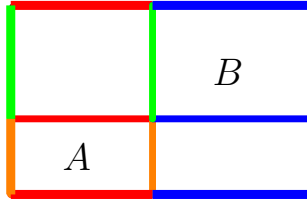
A rectangle is divided into 4 smaller rectangles, see below. The perimeters of rectangles A and B are 10 cm and 20 cm, respectively. Find the perimeter of the large rectangle.

قُسِّمَ مستطيل إلى 4 مستطيلات أصغر كما في الشكل أدناه، محيط المستطيلين A و B هو 10 سم و 20 سم على الترتيب، فأوجد محيط المستطيل الكبير.



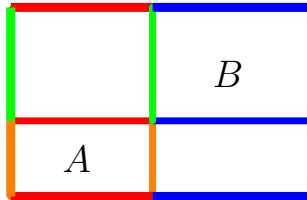
Solution to Question 11:

Since each side of rectangles A and B matches in length with a segment of the large rectangle's sides (as shown by the same colors), the total length of all their sides together equals the perimeter of the large rectangle. Thus, $10 + 20 = 30$ cm.



حل السؤال 11:

بما أن كل ضلع من ضلعي المستطيلين A و B يساوي طول قطعة من أضلاع المستطيل الكبير (كما تدل الألوان المتشابهة)، فإن مجموع أطوال جميع أضلاعهما معاً يساوي محيط المستطيل الكبير. لذلك $10 + 20 = 30$ سم.



Solution link

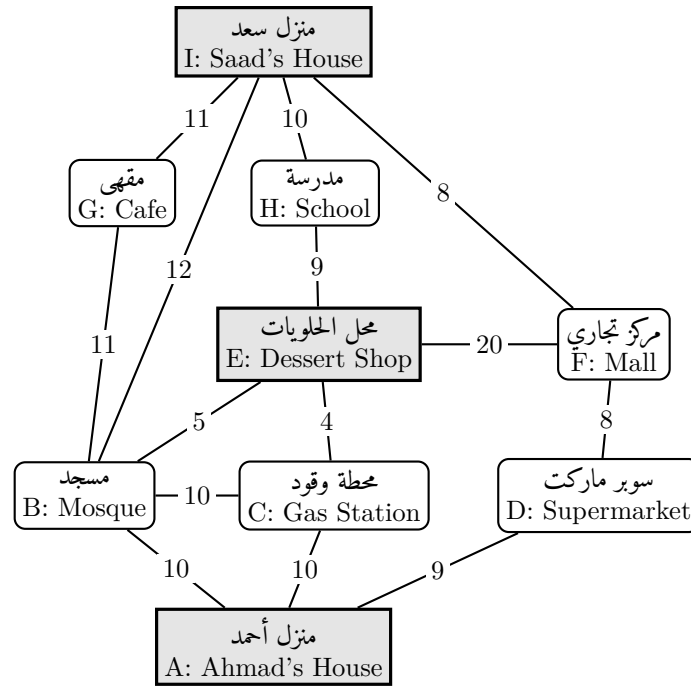


رابط الحل

Question 12

Saad invited Ahmad for Iftar. Ahmad wants to stop at a dessert shop first. Using the map showing travel times between locations, determine when Ahmad arrives at Saad's house if he leaves 30 minutes before Iftar and takes the fastest route via the dessert shop.

دعا سعد أحمد إلى وجبة إفطار، يريد أحمد التوقف عند محل الحلويات أولاً، باستخدام الخريطة التي توضح أوقات التنقل بين المواقع، حدد متى يصل أحمد إلى منزل سعد إذا غادر قبل وقت الإفطار بـ 30 دقيقة وسلك أسرع طريق يمر بمحل الحلويات.

**Solution to Question 12:**

The fastest route from A to E is $A \rightarrow C \rightarrow E$ which takes 14 minutes. Then, the fastest route from E to I is $E \rightarrow B \rightarrow I$, which takes 17 minutes. So the trip takes 31 minutes in total, which is 1 minute after Iftar.

حل السؤال 12:

أسرع طريق من A إلى E هو $A \rightarrow C \rightarrow E$ ويستغرق 14 دقيقة. ثم إن أسرع طريق من E إلى I هو $E \rightarrow B \rightarrow I$ ويستغرق 17 دقيقة. إذاً تستغرق الرحلة 31 دقيقة بالمجموع، أي يصل أحمد بعد وقت الإفطار بدقيقة واحدة.



Solution link



رابط الحل

Question 13

How many three-digit numbers consist of digits 1, 2, 3, 4, 5, 6 and contain the digit 3 (digits may repeat)?

كم عدد من ثلاثة خانات يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6 ويحتوي على الرقم 3 (يمكن تكرار الأرقام)؟

Solution to Question 13:

The total number of three-digit numbers consisting of 1, 2, 3, 4, 5, 6 is $6^3 = 216$. Among them, the total number of three-digit numbers not containing 3 is $5^3 = 125$. Then $216 - 125 = 91$.

حل السؤال 13:

عدد الأعداد المكوّنة من ثلاث خانات باستخدام الأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6 هو $6^3 = 216$. ومن بينها، عدد الأعداد التي لا تحتوي الرقم 3 هو $5^3 = 125$. إذاً العدد المطلوب هو $216 - 125 = 91$.



Solution link



رابط الحل

Question 14

When Asmaa makes a small cup of coffee, she uses 12 g of coffee beans with 200 mL of hot water. For a large cup, she uses 20 g of coffee beans with 300 mL of hot water. How much more coffee per milliliter of water does the large cup have compared with the small cup?

عندما تُحضّر أسماء كوباً صغيراً من القهوة، فإنها تستخدم 12 غ من البن مع 200 مل من الماء الساخن، أما لتحضير كوب كبير، فإنها تستخدم 20 غ من البن مع 300 مل من الماء الساخن، ما مقدار الزيادة في نسبة القهوة لكل مليلتر من الماء في الكوب الكبير مقارنة بالكوب الصغير؟

Solution to Question 14:

The difference between the concentrations $= \frac{20}{300} - \frac{12}{200} = \frac{40}{600} - \frac{36}{600} = \frac{4}{600} = \frac{1}{150}$.

حل السؤال 14:

فرق التركيزين يساوي $\frac{20}{300} - \frac{12}{200} = \frac{40}{600} - \frac{36}{600} = \frac{4}{600} = \frac{1}{150}$



Solution link



رابط الحل

Question 15

The numerator and the denominator of a fraction are positive integers whose sum is 2025. The value of this fraction is less than $\frac{1}{3}$. What is the greatest such fraction?

عدد كسري بسطه ومقامه هما عدداً صحيحان موجبان مجموعهما 2025 ، قيمة هذا الكسر أقل من $\frac{1}{3}$ ، ما هو أكبر كسر يحقق هذه الشروط؟

Solution to Question 15:

Let us denote the fraction as $\frac{a}{2025-a}$ where $1 \leq a \leq 2024$. Then, we have the inequality $\frac{a}{2025-a} < \frac{1}{3}$, which implies $4a < 2025$, hence $a \leq 506.25$. Thus, the largest value for a is 506 and the smallest value for the denominator is 1519, which gives us the answer $\frac{506}{1519}$.

حل السؤال 15:

لنكتب الكسر على صورة $\frac{a}{2025-a}$ حيث $1 \leq a \leq 2024$. لدينا المتباينة $\frac{a}{2025-a} < \frac{1}{3}$ ، وهذا يكافئ $4a < 2025$ ، ومنه $a \leq 506.25$. إذاً أكبر قيمة ممكنة لـ a هي 506، وأصغر قيمة للمقام هي 1519، وبالتالي الإجابة هي $\frac{506}{1519}$.



Solution link



رابط الحل

Question 16

For positive numbers x, y, z, t , the following relationship holds. What is the correct ordering of the numbers?

للأعداد الموجبة x, y, z, t ، تنطبق العلاقة أدناه، ما هو الترتيب الصحيح للأعداد؟

$$x^2 = y^3 = \sqrt{z} = \frac{1}{t} > 1$$

Solution to Question 16:

Let all expressions of the equality relation be equal to k , then $x = k^{\frac{1}{2}}$, $y = k^{\frac{1}{3}}$, $z = k^2$, $t = \frac{1}{k}$, where $k > 1$. Then, $\frac{1}{k} < 1 < k^{\frac{1}{3}} < k^{\frac{1}{2}} < k^2$ which is $t < y < x < z$.

حل السؤال 16:

لتكن جميع تعابير علاقة التساوي مساوية للعدد k ، عندئذٍ $x = k^{\frac{1}{2}}$ و $y = k^{\frac{1}{3}}$ و $z = k^2$ و $t = \frac{1}{k}$ ، حيث $k > 1$. إذاً

$$\frac{1}{k} < 1 < k^{\frac{1}{3}} < k^{\frac{1}{2}} < k^2$$

أي $t < y < x < z$.



Solution link



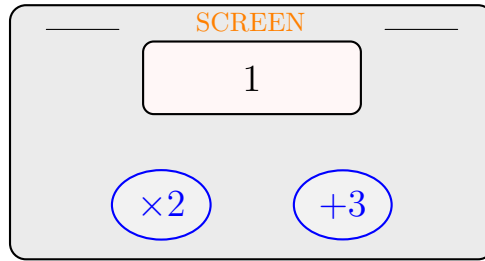
رابط الحل

Question 17

A machine has two buttons, $\times 2$ and $+3$, and a screen showing a number. The left button multiplies the number on the screen by 2, and the right button adds 3 to it. For example, after pressing $+3$ and then $\times 2$, the number 1 on the screen becomes 8, because $1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{\times 2} 8$.

Starting from 1, how many different numbers are possible to get after three presses?

تحتوي آلة على زررين $\times 2$ و $+3$ وشاشة تعرض عدداً، الزر الأيسر يضاعف العدد الظاهر على الشاشة بـ 2، بينما الزر الأيمن يضيف 3 إلى العدد الظاهر على الشاشة. على سبيل المثال، عند الضغط على $+3$ ثم $\times 2$ ، فإن الرقم 1 على الشاشة يصبح 8، لأن $1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{\times 2} 8$. بدءاً من العدد 1، كم عدداً مختلفاً يمكن الحصول عليه بعد ثلاث ضغطات؟

**Solution to Question 17:**

Below are all possible numbers that can be gotten with three presses, and they are 7, 8, 10, 11, 14, 16:

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8; \quad 1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{+3} 7; \quad 1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{\times 2} 10; \quad 1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8;$$

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16; \quad 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+3} 11; \quad 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{\times 2} 14; \quad 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+3} 10;$$

Answer: 6.

حل السؤال 17:

الأعداد الممكن الحصول عليها بعد ثلاث ضغطات هي 7, 8, 10, 11, 14, 16:

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8; \quad 1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{+3} 7; \quad 1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{\times 2} 10; \quad 1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8;$$

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16; \quad 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+3} 11; \quad 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{\times 2} 14; \quad 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+3} 10;$$

الإجابة: 6.



Solution link

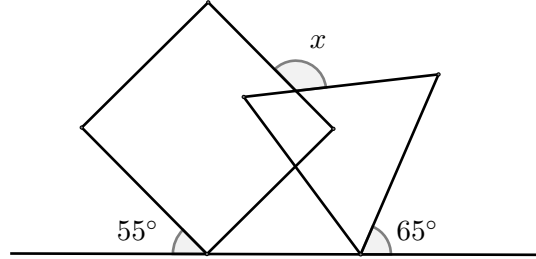


رابط الحل

Question 18

A square and an equilateral triangle were drawn as shown below. What is the measure of the angle x ?

رُسم مربع ومثلث متطابق الأضلاع كما في الشكل أدناه، ما قياس الزاوية x ؟

**Solution to Question 18:**

Consider the triangular region formed in the figure, which is outside the square and the equilateral triangle, and bounded by the horizontal line. By angle-chasing, we easily find the angles of this region to be $35^\circ, 55^\circ, 90^\circ$. Now consider the quadrilateral formed by the intersection of the square and the equilateral triangle. We find x as an internal angle of this quadrilateral to be $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

حل السؤال 18:

انظر إلى المنطقة المثلثية المتكوّنة في الشكل، وهي خارج المربع والمثلث المتساوي الأضلاع، ومحددة بالخط الأفقي. باستخدام تتبع الزوايا نجد بسهولة أن زوايا هذه المنطقة هي $35^\circ, 55^\circ, 90^\circ$. الآن انظر إلى الشكل الرباعي الناتج من تقاطع المربع مع المثلث المتساوي الأضلاع. تكون الزاوية x زاوية داخلية في هذا الرباعي، ومن ثم $x = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.



Solution link



رابط الحل

Question 19

Ali is creating a 5-digit password (with no zeros) such that each digit is equal to the sum of all digits to its right. What is the sum of the digits in the password?

يصنع علي كلمة مرور مكونة من 5 خانات (بدون أصفار) بحيث يكون كل رقم مساوياً لمجموع جميع الأرقام التي على يمينه، ما هو مجموع أرقام الخانات في كلمة المرور؟

Solution to Question 19:

The password must be 84211, so sum of the digits is 16.

حل السؤال 19:

لا بد أن تكون كلمة المرور هي 84211، وبالتالي مجموع خاناتها هو 16.



Solution link



رابط الحل

Question 20

Evaluate the sum:

أوجد قيمة المجموع:

$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots + 1445 + 1446 - 1447$$

Solution to Question 20:

Solution 1. The pattern $(+, +, -, -)$ repeats. Therefore, each block of four adds as follows:

$$n + (n + 1) - (n + 2) - (n + 3) = -4.$$

The 361-th and the last block ends with -1444 and the sum up to this block is $361 \cdot (-4) = -1444$. The total sum is then $-1444 + 1445 + 1446 - 1447 = 1 - 1 = 0$.

Solution 2. We consider blocks of four numbers starting from 2, i.e.

$$1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (1442 - 1443 - 1444 + 1445) + 1446 - 1447.$$

Each block is equal to 0. Hence, the rest is equal to $1 + 1446 - 1447 = 0$.

حل السؤال 20:

الحل 1. يتكرر النمط $(+, +, -, -)$ ، ولذلك فإن كل مجموعة من أربعة أعداد يكون مجموعها:

$$n + (n + 1) - (n + 2) - (n + 3) = -4.$$

وتنتهي المجموعة رقم 361 (وهي الأخيرة) بالعدد -1444 ، فيكون مجموع ما حتى هذه المجموعة هو $361 \cdot (-4) = -1444$. وعليه فالمجموع الكلي: $-1444 + 1445 + 1446 - 1447 = 1 - 1 = 0$.

الحل 2. نقسم المجموع إلى مجموعات من أربعة أعداد بدءاً من 2، أي:

$$1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (1442 - 1443 - 1444 + 1445) + 1446 - 1447.$$

كل مجموعة تساوي 0، إذاً الباقي يساوي $1 + 1446 - 1447 = 0$.



Solution link

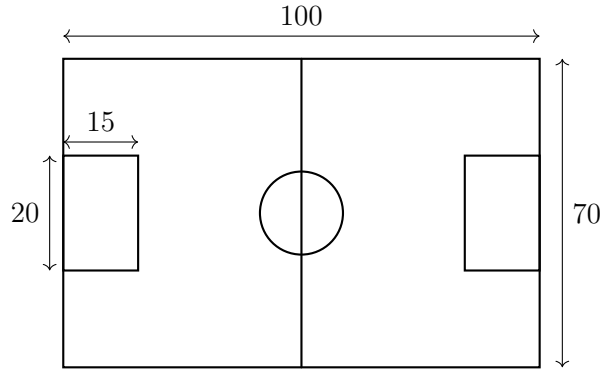


رابط الحل

Question 21

A football field was painted to mark its boundaries, as shown in the figure. Based on the labeled lengths in the diagram, what is the radius (in meters) of the circle if a total of 570 meters was painted?

تم طلاء ملعب كرة قدم لتحديد شكله كما هو موضح في الشكل، بناءً على الأطوال الموضحة في الرسم، ما هو نصف قطر الدائرة (بالأمتار) إذا كان إجمالي طول ما تم طلاؤه 570 متراً؟ (لاحظ أن $\pi = 3.14$)



Solution to Question 21:

The three vertical pitch segments make $3 \cdot 70 = 210$ m. The horizontal pitch segments make $2 \cdot 100 = 200$ m. The inner penalty boxes make $4 \cdot 15 + 2 \cdot 20 = 100$ m. So, the perimeter of the circle is $570 - 210 - 200 - 100 = 60$, and the radius would be $\frac{60}{2\pi} = \frac{30}{\pi}$.

حل السؤال 21:

أطوال الخطوط العمودية الثلاثة تساوي $3 \cdot 70 = 210$ متراً، وأطوال الخطين الأفقيين تساوي $2 \cdot 100 = 200$ متراً، أما مستطيلات منطقة الجزاء الداخلية فتعطي $4 \cdot 15 + 2 \cdot 20 = 100$ متراً. إذاً محيط الدائرة هو $570 - 210 - 200 - 100 = 60$ ، ومنه نصف القطر $\frac{60}{2\pi} = \frac{30}{\pi}$.



Solution link

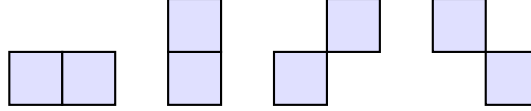


رابط الحل

Question 22

How many ways are there to mark two cells of a 7×7 grid square that have a common side or a common vertex (see below)?

كم عدد الطرق لاختيار خليتين في شبكة 7×7 بحيث يكون لهما ضلع مشترك أو رأس مشترك (انظر أدناه)؟

**Solution to Question 22:**

Consider two cases.

Common side: The number of such pairs is the same the number of the unit segments that lie strictly inside the grid, i.e. $7 \cdot (7 - 1) \cdot 2 = 84$.

Common vertex: The number of such pairs is twice the number of vertices that lie strictly inside the grid, i.e. $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$. Indeed, each 2×2 contains exactly two such pairs.

So, there are $84 + 72 = 156$ touching pairs.

حل السؤال 22:

نقسم إلى حالتين.

ضلع مشترك: عدد هذه الأزواج يساوي عدد القطع الواحدة التي تقع كلياً داخل الشبكة، أي $7 \cdot (7 - 1) \cdot 2 = 84$.

رأس مشترك: عدد هذه الأزواج يساوي ضعف عدد الرؤوس التي تقع داخل الشبكة، أي $6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$. فكل مربع 2×2 يحتوي بالضبط على زوجين من هذا النوع.

إذاً عدد الأزواج المتلامسة هو $84 + 72 = 156$.



Solution link



رابط الحل

Question 23

There are two sisters, Fatimah and Samira. The age of Fatimah is one of the numbers 10, 11, ..., 20, and the age of Samira is one of the numbers 27, 28, 29. The product of their ages is the square of an integer. What is the sum of their ages?

فاطمة وسميرة أختان، عمر فاطمة هو أحد الأعداد 10, 11, ..., 20، وعمر سميرة هو أحد الأعداد 27, 28, 29، حاصل ضرب عمريهما هو مربع كامل لعدد صحيح، فما مجموع عمريهما؟

Solution to Question 23:

The older sister's age is one of $27 = 3^3$, $28 = 2^2 \cdot 7$, $29 = 29^1$. If the power of a prime divisor of this number is odd, then the other number is divisible by that prime, since their product is a perfect square. Hence, 29 can't be the age of the first one because no number between 10 and 20 is divisible by 29. For $28 = 2^2 \cdot 7$, the only number which is divisible by 7 is 14. But, their product $28 \cdot 14 = 2^3 \cdot 7^2$ is not a perfect square. For $27 = 3^3$, the numbers which are divisible by 3 are 12, 15, 18. From these numbers, only 12 satisfies the condition that the product is a perfect square. Hence, the sum of their ages is $27 + 12 = 39$.

حل السؤال 23:

عمر الأخت الكبرى أحد الأعداد $27 = 3^3$, $28 = 2^2 \cdot 7$, $29 = 29^1$. إذا كان أس قاسم أولي في هذا العدد فردياً، فلا بد أن يكون العدد الآخر قابلاً للقسمة على هذا القاسم حتى يكون حاصل الضرب مربعاً كاملاً. لذلك لا يمكن أن يكون 29 هو عمر الأخت الكبرى لأن لا يوجد عدد بين 10 و 20 يقبل القسمة على 29. أما $28 = 2^2 \cdot 7$ فالعدد الوحيد بين 10 و 20 القابل للقسمة على 7 هو 14، لكن $28 \cdot 14 = 2^3 \cdot 7^2$ ليس مربعاً كاملاً. وبالنسبة لـ $27 = 3^3$ فالأعداد القابلة للقسمة على 3 هي 12, 15, 18، ومن بينها فقط 12 يحقق أن حاصل الضرب مربع كامل. إذاً مجموع عمريهما هو $27 + 12 = 39$.



Solution link



رابط الحل

Question 24

Let a, b, c be non-zero real numbers which satisfy:
 $a + \frac{1}{b} = 2$, $b + \frac{1}{c} = 3$, $c + \frac{1}{a} = 4$.

What is the value of the following expression?

إذا كانت a, b, c أعداداً حقيقية غير صفرية، بحيث:
 $a + \frac{1}{b} = 2$, $b + \frac{1}{c} = 3$, $c + \frac{1}{a} = 4$
 فما قيمة العبارة التالية؟

$$abc + \frac{1}{abc}$$

Solution to Question 24:

Solution 1. We have

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) = abc + \frac{1}{abc} + \left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(b + \frac{1}{c}\right) + \left(c + \frac{1}{a}\right).$$

Thus, after substitution, it follows that

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = abc + \frac{1}{abc} + 2 + 3 + 4 = abc + \frac{1}{abc} + 9.$$

Hence, $abc + \frac{1}{abc} = 15$.

Solution 2. Expressing $b = \frac{3c-1}{c}$, $a = \frac{1}{4-c}$ from 2nd, 3rd and substituting into the 1st, we arrive at $5c^2 - 19c + 7 = 0$. Then the required expression gets the form,

$$abc + \frac{1}{abc} = \frac{10c^2 - 14c + 17}{-3c^2 + 13c - 4} = \frac{15(8c + 1)}{8c + 1} = 15.$$

The last equality obtained by substituting $c^2 = \frac{19c - 7}{5}$.

حل السؤال 24:

الحل 1. لدينا

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) = abc + \frac{1}{abc} + \left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(b + \frac{1}{c}\right) + \left(c + \frac{1}{a}\right).$$

وبالتعويض ينتج

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = abc + \frac{1}{abc} + 2 + 3 + 4 = abc + \frac{1}{abc} + 9.$$

إذاً $abc + \frac{1}{abc} = 15$.

الحل 2. من العلاقتين الثانية والثالثة نحصل على $b = \frac{3c-1}{c}$ و $a = \frac{1}{4-c}$ ، وبالتعويض في الأولى نصل إلى $5c^2 - 19c + 7 = 0$. عندئذ تصبح العبارة المطلوبة على الصورة

$$abc + \frac{1}{abc} = \frac{10c^2 - 14c + 17}{-3c^2 + 13c - 4} = \frac{15(8c + 1)}{8c + 1} = 15.$$

وتنتج المساواة الأخيرة بالتعويض $c^2 = \frac{19c - 7}{5}$.



Solution link



رابط الحل

Solutions to Seniors Track Questions-First Round

حلول أسئلة مسار الشباب - المرحلة الأولى

Question 1

If we increase the length of each side of a cube by 100 percent, by what percent does the volume increase?

إذا زاد طول كل ضلع من أضلاع مكعب بنسبة 100%، كم نسبة الزيادة في حجم المكعب؟

Solution to Question 1:

Increasing the length of a side a by 100 percent is the same as multiplying it by 2. The volume of the cube is now a^3 , after multiplication it will be $(2a)^3 = 8a^3$. There is an increase by $7a^3$, which is 700 percent.

حل السؤال 1:

زيادة طول ضلع مقداره a بنسبة 100% تعني ضربه في 2. حجم المكعب في الأصل هو a^3 ، وبعد الزيادة يصبح $(2a)^3 = 8a^3$. إذن مقدار الزيادة هو $8a^3 - a^3 = 7a^3$ ، أي زيادة بنسبة 700%.



Solution link

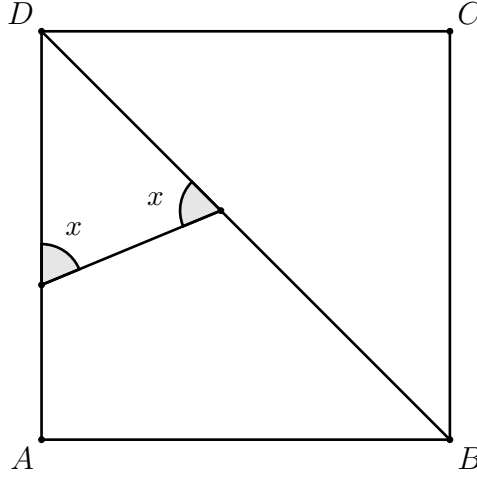


رابط الحل

Question 2

The figure shows square $ABCD$. What is the value of x ?

بين الشكل المربع $ABCD$ ، ما هي قيمة x ؟

**Solution to Question 2:**

In the square $ABCD$, the diagonal BD bisects the angle $\angle ADC$, so $\angle ADB = 45^\circ$. The figure defines a triangle with vertices at D , a point on AD , and a point on BD . The angles of this triangle are given as 45° and two angles of size x . The sum of angles in a triangle is 180° , so: $x + x + 45^\circ = 180^\circ$. Therefore, $2x = 135^\circ$, so $x = 67.5^\circ$.

حل السؤال 2:

في المربع $ABCD$ القطر BD ينصف الزاوية $\angle ADC$ ، لذا $\angle ADB = 45^\circ$. يتكوّن مثلث رؤوسه عند D ونقطة على AD ونقطة على BD . زوايا هذا المثلث هي 45° وزاويتان قياس كل منهما x . وبما أن مجموع زوايا المثلث يساوي 180° فإن $x + x + 45^\circ = 180^\circ$. إذن $2x = 135^\circ$ ومنه $x = 67.5^\circ$.



Solution link



رابط الحل

Question 3

Ali starts the week with 3 white shirts, 2 green shirts, 4 black shorts, and 1 gray short. On Day 1, he wears a white shirt and black shorts. Assuming he doesn't wear clothes again, what is the probability he randomly selects a white shirt and black shorts on Day 2?

يبدأ علي الأسبوع ولديه 3 قمصان بيضاء وقيصان أخضران و 4 سراويل سوداء و سروال رمادي واحد، في اليوم الأول، ارتدى قيصاً أبيض و سروالاً أسود، بافتراض أنه لا يعيد ارتداء الملابس، ما هو احتمال أن يختار عشوائياً قيصاً أبيض و سروالاً أسود في اليوم الثاني؟

Solution to Question 3:

After the first day, there are 2 white shirts, 2 green shirts, 3 black shorts, and 1 gray short left, so the probability of picking a white shirt and a black short is $\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{8}$

حل السؤال 3:

بعد اليوم الأول يبقى قيصان أبيضان وقيصان أخضران (أي 4 قمصان)، كما يبقى 3 سراويل سوداء وسروال رمادي واحد (أي 4 سراويل). لذلك فإن احتمال اختيار قيص أبيض وسروال أسود هو $\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{8}$.



Solution link

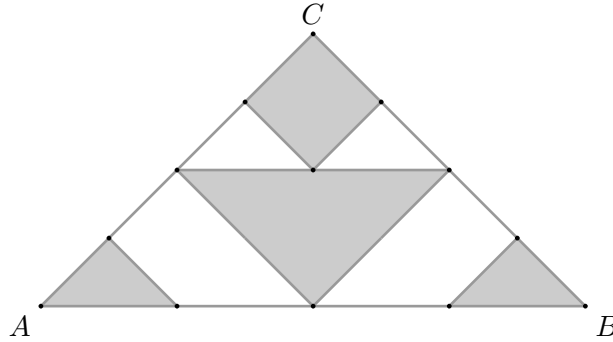


رابط الحل

Question 4

The figure shows a triangle ABC that is subdivided into several polygons. Points placed on the sides of triangle ABC divide each side into four equal segments. Determine what fraction of the total area of triangle ABC is shaded.

يُبيّن الشكل المثلث ABC المقسم إلى عدة مضلعات، النقاط الموضوعة على أضلاع المثلث ABC تُقسّم كل ضلع إلى أربع قطع متساوية، أوجد الكسر الذي تُمثله المساحة المظللة من المساحة الكلية للمثلث ABC .

**Solution to Question 4:**

The small triangles are $\frac{1}{16}$ of the total area each. The middle triangle is $\frac{1}{4}$ of the total area. The square is $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ of the total area, so the shaded area is $2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ of the total area.

حل السؤال 4:

كل مثلث صغير مساحته تساوي $\frac{1}{16}$ من المساحة الكلية. المثلث الأوسط مساحته $\frac{1}{4}$ من المساحة الكلية. أما المربع فساحته $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ من المساحة الكلية. لذا فالمساحة المظللة تساوي $2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ من المساحة الكلية.



Solution link



رابط الحل

Question 5

Determine the value of:

احسب قيمة:

$$3 \cdot \frac{1}{37} + 2 \cdot \frac{36}{37} + \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} + \left(\frac{36}{37}\right)^2$$

Solution to Question 5:

Let $a = \frac{1}{37}$ and $b = \frac{36}{37}$, it follows that $a + b = 1$. Then, the expression is equal to $3a + 2b + ab + b^2 = 3a + 2b + b(a + b) = 3a + 2b + b = 3(a + b) = 3$.

حل السؤال 5:

لتكن $a = \frac{1}{37}$ و $b = \frac{36}{37}$ ، عندها $a + b = 1$. يصبح التعبير:

$$3a + 2b + ab + b^2 = 3a + 2b + b(a + b) = 3a + 2b + b = 3(a + b) = 3$$



Solution link



رابط الحل

Question 6

How many four-digit numbers consisting of digits 1, 2, 4, 5 (digits cannot repeat) are divisible by 5 and greater than 2025?

كم عدد الأعداد المكونة من أربعة خانات باستخدام الأرقام 1, 2, 4, 5 (لا يمكن تكرار الأرقام) والتي تقبل القسمة على 5 وأكبر من 2025 ؟

Solution to Question 6:

Since the number is divisible by 5, the last digit should be 5. The first digit cannot be 1, because it should be greater than 2025. Then the first digit can be 2 or 4, the second digit can be two of the digits 1, 2, 4, and the third digit can be one of the digits 1, 2, 4. Therefore, the total number of such kind of numbers is $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$.

حل السؤال 6:

بما أن العدد يقبل القسمة على 5 فلا بد أن تكون خانة الآحاد هي 5. ولا يمكن أن تكون خانة الآلاف 1 لأن العدد يجب أن يكون أكبر من 2025. إذن خانة الآلاف إما 2 أو 4 (خياران). بعد تثبيت ذلك، تكون خانة المئات أحد رقمين من $\{1, 2, 4\}$ (خياران)، وخانة العشرات هي الرقم المتبقي من $\{1, 2, 4\}$ (خيار واحد). لذلك عدد هذه الأعداد هو $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$.



Solution link



رابط الحل

Question 7

The median of nine different integers is 12. After including the two numbers 13 and 16, what is the median of these eleven numbers?

الوسيط لـ 9 أعداد صحيحة مختلفة هو 12، بعد إضافة العددين 13 و 16، ما هو الوسيط للأعداد الأحد عشر؟

Solution to Question 7:

When the numbers are listed in increasing order, the fifth number is 12, hence the sixth number 13 or more. After 13 and 16 join, the fifth number must still be 12 and the sixth number must be 13. Therefore, the median of the final 11 numbers is 13.

حل السؤال 7:

عند ترتيب الأعداد تصاعدياً يكون العدد الخامس هو 12، وبالتالي يكون العدد السادس 13 أو أكثر. بعد إضافة العددين 13 و 16 يبقى العدد الخامس 12، ويصبح العدد السادس 13. لذلك وسيط الأعداد الأحد عشر هو 13.



Solution link



رابط الحل

Question 8

If a new girl joins the math club but 20% of the boys leave it, the numbers of boys and girls would be equal. On the other hand, if one girl leaves the math club and then the number of girls increases by 30%, the numbers of boys and girls would also be equal. How many children are currently in the math club?

إذا انضمت فتاة جديدة إلى نادي الرياضيات وفي نفس الوقت غادر 20% من الفتيان، فسيصبح عدد الفتيان والفتيات متساوياً، في المقابل، إذا غادرت فتاة واحدة نادي الرياضيات ثم زاد عددهن بنسبة 30%، فسيكون عدد الفتيان والفتيات متساوياً أيضاً، كم عدد الأطفال الموجودين في نادي الرياضيات؟

Solution to Question 8:

Let us denote the number of girls by g and the number of boys by b . The statement gives us the following system of equations:

$$\begin{aligned} g + 1 &= \frac{4}{5}b, \\ \frac{13}{10}(g - 1) &= b. \end{aligned}$$

Plugging in $b = \frac{5}{4}g + \frac{5}{4}$ from the first equation into the second equation, we get

$$\frac{5}{4}g + \frac{5}{4} = \frac{13}{10}g - \frac{13}{10},$$

which solves for $g = 51$, hence $b = \frac{13}{10} \cdot 50 = 65$. Therefore, the answer is $g + b = 51 + 65 = 116$.

حل السؤال 8:

لنرمز لعدد الفتيات بـ g ولعدد الفتيان بـ b . من المعطيات نحصل على النظام:

$$\begin{aligned} g + 1 &= \frac{4}{5}b, \\ \frac{13}{10}(g - 1) &= b. \end{aligned}$$

نعوّض من المعادلة الأولى $b = \frac{5}{4}g + \frac{5}{4}$ في المعادلة الثانية فنحصل على

$$\frac{5}{4}g + \frac{5}{4} = \frac{13}{10}g - \frac{13}{10},$$

ومنها $g = 51$ ، ومن ثم $b = \frac{13}{10} \cdot 50 = 65$. إذن العدد الكلي هو $g + b = 51 + 65 = 116$.



Solution link



رابط الحل

Question 9

Let $f(5x) = \frac{5}{2+x}$. What is the value of $f(-5)$?

ليكن $f(5x) = \frac{5}{2+x}$ ، ما هي قيمة $f(-5)$ ؟

Solution to Question 9:

Plugging $x = t/5$, it follows that $f(t) = \frac{5}{2+\frac{t}{5}} = \frac{25}{10+t}$, yielding $f(-x) = \frac{25}{10-x}$

حل السؤال 9:

نعوض $x = \frac{t}{5}$ فنحصل على $f(t) = \frac{5}{2+\frac{t}{5}} = \frac{25}{10+t}$ ومنه $f(-5) = \frac{25}{10-5} = 5$



Solution link



رابط الحل

Question 10

How many zeroes does the result of the following product contain?

كم صفرًا يحتويه ناتج الضرب التالي؟

$$650 \times 4^6 \times 5^9$$

Solution to Question 10:

Notice that we can write the number in the following way:

$$650 \times 4^6 \times 5^9 = 26 \times 5^2 \times 4 \times 4^5 \times 5^9 = 26 \times 2 \times 2^{11} \times 5^{11} = 52 \times 10^{11}.$$

Hence we can easily see that this number has 11 zeroes.

حل السؤال 10:

نلاحظ أنه يمكن كتابة العدد بالشكل التالي:

$$650 \times 4^6 \times 5^9 = 26 \times 5^2 \times 4 \times 4^5 \times 5^9 = 26 \times 2 \times 2^{11} \times 5^{11} = 52 \times 10^{11}.$$

وبالتالي يتضح أن الناتج يحتوي على 11 صفرًا.



Solution link



رابط الحل

Question 11

Let $a = \frac{1 + \frac{1}{2024}}{2025}$, $b = \frac{1 + \frac{1}{2025}}{2026}$. What is the value of the following expression?

ليكن $a = \frac{1 + \frac{1}{2024}}{2025}$ و $b = \frac{1 + \frac{1}{2025}}{2026}$ ، ما هي قيمة التعبير التالي؟

$$\frac{a + b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Solution to Question 11:

Notice that

$$\frac{a + b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{a + b}{\frac{a+b}{ab}} = ab$$

On the other hand, after simplification, $a = \frac{1}{2024}$, $b = \frac{1}{2025}$. Hence, $ab = \frac{1}{2024 \cdot 2025}$.

حل السؤال 11:

نلاحظ أن

$$\frac{a + b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{a + b}{\frac{a+b}{ab}} = ab.$$

ومن جهة أخرى، بعد التبسيط نحصل على $a = \frac{1}{2024}$ و $b = \frac{1}{2025}$ ، وبالتالي $ab = \frac{1}{2024 \cdot 2025}$.



Solution link

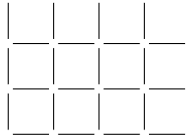


رابط الحل

Question 12

A 3×4 rectangle below consists of identical sticks. How many sticks do we need to construct a 40×50 rectangle?

يتكون مستطيل 3×4 أذناه من أعواد متطابقة، كم عدد الأعواد التي نحتاجها لبناء مستطيل 40×50 ؟

**Solution to Question 12:**

Each horizontal line consists of 50 sticks, and there are 41 such lines. Therefore, there are $41 \cdot 50 = 2050$ horizontal sticks. Similarly, there are $51 \cdot 40 = 2040$ vertical sticks. Totally, there are $2050 + 2040 = 4090$ sticks.

حل السؤال 12:

كل خط أفقي يتكون من 50 عوداً، وعدد الخطوط الأفقية هو 41، إذن عدد الأعواد الأفقية هو $41 \cdot 50 = 2050$. وبالمثل، عدد الأعواد العمودية هو $51 \cdot 40 = 2040$. لذلك المجموع الكلي هو $2050 + 2040 = 4090$ عوداً.



Solution link



رابط الحل

Question 13

For $x = -1234567$, what is the value of the following expression?

ليكن $x = -1234567$ ، ما هي قيمة التعبير التالي؟

$$\sqrt{100 - 20x + x^2} - \sqrt{x^2}$$

Solution to Question 13:

Since $100 - 20x + x^2 = (10 - x)^2$ and $\sqrt{a^2} = |a|$, we get

$$\sqrt{100 - 20x + x^2} - \sqrt{x^2} = \sqrt{(10 - x)^2} - \sqrt{x^2} = |10 - x| - |x|.$$

Substituting $x = -1234567$, we obtain

$$|10 - x| - |x| = |10 + 1234567| - |-1234567| = 10 + 1234567 - 1234567 = 10.$$

حل السؤال 13:

بما أن $\sqrt{a^2} = |a|$ و $100 - 20x + x^2 = (10 - x)^2$ فإن

$$\sqrt{100 - 20x + x^2} - \sqrt{x^2} = \sqrt{(10 - x)^2} - \sqrt{x^2} = |10 - x| - |x|.$$

بالتعويض بـ $x = -1234567$ نحصل على

$$|10 - x| - |x| = |10 + 1234567| - |-1234567| = 10 + 1234567 - 1234567 = 10.$$



Solution link

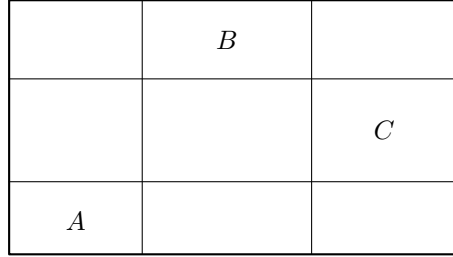


رابط الحل

Question 14

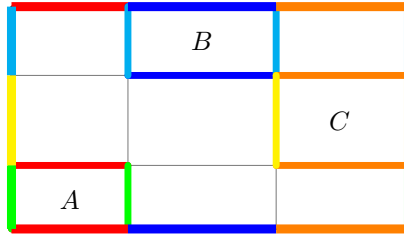
A rectangle is divided into 9 smaller rectangles, see below. The perimeters of rectangles A, B, C are 10 cm, 20 cm, 30 cm, respectively. Find the perimeter of the large rectangle.

في الشكل أدناه، قُسم مستطيل إلى 9 مستطيلات أصغر، ومحيطات المستطيلات A و B و C هي 10 سم و 20 سم و 30 سم على التوالي، أوجد محيط المستطيل الكبير.



Solution to Question 14:

Since each side of rectangles A, B , and C matches in length with a segment of the large rectangle's sides (as shown by the same colors), the total length of all their sides together equals the perimeter of the large rectangle. Hence, $10 + 20 + 30 = 60$ cm.



حل السؤال 14:

بما أن كل ضلع من أضلاع المستطيلات A و B و C يساوي طول قطعة من أضلاع المستطيل الكبير (كما تُبيّنه الألوان نفسها)، فإن مجموع محيطات هذه المستطيلات يساوي محيط المستطيل الكبير. إذن: $10 + 20 + 30 = 60$ سم.



Solution link



رابط الحل

Question 15

What is the largest of the following numbers?

ما هو أكبر الأعداد التالية؟

Solution to Question 15:

Evaluating all choices with base 2 to compare the powers, we get that the choices are 2^{2025} , 2^{2028} , 2^{2022} , 2^{1515} , 2^{2020} , so the answer is 4^{1014} .

حل السؤال 15:

بكتابة جميع الخيارات على صورة قوى للعدد 2 للمقارنة نحصل على: 2^{2025} , 2^{2028} , 2^{2022} , 2^{1515} , 2^{2020} ، وأكبرها هو 2^{2028} ، أي أن العدد الأكبر هو 4^{1014} .



Solution link



رابط الحل

Question 16

What is the largest possible value of $a^b + c^d$, where a, b, c , and d are different elements of the set $\{1, 2, 3, 4\}$?

ما هي أكبر قيمة ممكنة لـ $a^b + c^d$ ، حيث a و b و c و d عناصر مختلفة من المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ ؟

Solution to Question 16:

To maximize the sum $a^b + c^d$ using the distinct digits $\{1, 2, 3, 4\}$, we must prioritize creating the largest possible single power. Comparing the largest combinations: $4^3 = 64$ and $3^4 = 81$. We choose $3^4 = 81$ as the first term. The remaining digits are $\{1, 2\}$. The maximum value for the second term using these digits is $2^1 = 2$. Therefore, the maximum sum is $81 + 2 = 83$.

حل السؤال 16:

للحصول على أكبر قيمة للمجموع $a^b + c^d$ باستخدام الأرقام المختلفة $\{1, 2, 3, 4\}$ نختار أولاً أكبر قوة ممكنة. نقارن: $4^3 = 64$ و $3^4 = 81$ ، فنختار $3^4 = 81$ كحد أول. تبقى الأرقام $\{1, 2\}$ ، وأكبر قيمة للحد الثاني هي $2^1 = 2$. إذن أكبر مجموع هو $81 + 2 = 83$.



Solution link

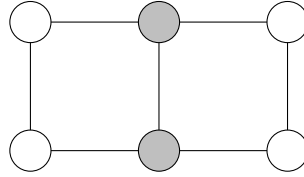


رابط الحل

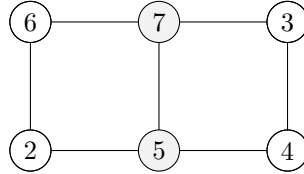
Question 17

Each circle below contains one number from 2, 3, 4, 5, 6, 7 and each number is used once. The product of the numbers at the four vertices of the left square is equal to the product of the numbers at the four vertices of the right square. Find the sum of the two numbers in the shaded circles.

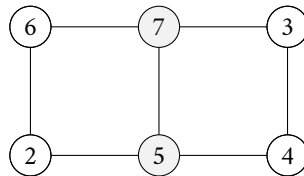
كل دائرة أدناه تحتوي على عدد واحد من الأعداد 2, 3, 4, 5, 6, 7، ويُستخدم كل عدد مرة واحدة فقط، حاصل ضرب الأعداد الموجودة عند الرؤوس الأربعة للمربع الأيسر يساوي حاصل ضرب الأعداد الموجودة عند الرؤوس الأربعة للمربع الأيمن، أوجد مجموع العددين الموجودين في الدائرتين المظلتين.

**Solution to Question 17:**

Note that 5 can't be on the corner vertices. Because otherwise one of the products will be divisible by 5, and the other product will not. Similarly, with 7. Therefore, 5 and 7 are in the middle circles. So, $5 + 7 = 12$.

**حل السؤال 17:**

نلاحظ أن العدد 5 لا يمكن أن يكون عند أحد رؤوس المربعات، لأن ذلك سيجعل أحد حاصلَي الضرب قابلاً للقسمة على 5 والآخر غير قابل. وبالمثل بالنسبة للعدد 7. إذن يجب أن يكون العددا 5 و7 في الدائرتين الوسطيتين (المظلتين)، وبالتالي $5 + 7 = 12$.



Solution link



رابط الحل

Question 18

Evaluate the following product:

احسب حاصل الضرب التالي:

$$(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{4} - 1).$$

Solution to Question 18:

Solution 1. Let $x = \sqrt[3]{2}$. Then $\sqrt[3]{4} = x^2$. The expression can be rewritten as: $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - 1)$. Factor the last term $(x^2 - 1)$ into $(x - 1)(x + 1)$ and rearrange the product: $[(x + 1)(x^2 - x + 1)] \cdot [(x - 1)(x^2 + x + 1)]$. Recognizing the sum and difference of cubes identities

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \text{ and } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

this simplifies to: $(x^3 + 1)(x^3 - 1)$. Substituting $x^3 = 2$ back into the expression: $(2 + 1)(2 - 1) = 3 \cdot 1 = 3$.

حل السؤال 18:

الحل 1. لنضع $x = \sqrt[3]{2}$ ، عندها $\sqrt[3]{4} = x^2$. يمكن إعادة كتابة التعبير على الصورة: $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - 1)$. نفكك الحد الأخير $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$ ثم نعيد ترتيب حاصل الضرب: $[(x + 1)(x^2 - x + 1)] \cdot [(x - 1)(x^2 + x + 1)]$ وباستخدام متطابقات مجموع و فرق المكعبين

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \text{ and } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

يتبسط ذلك إلى: $(x^3 + 1)(x^3 - 1)$. وبما أن $x^3 = 2$ فإن القيمة تساوي $(2 + 1)(2 - 1) = 3 \cdot 1 = 3$.



Solution link



رابط الحل

Question 19

Bader, Nawaf, and Yasser each chose a positive integer. Each person multiplied his number by each of the other two numbers, then subtracted the smaller product from the larger product. Bader's result was 1, and Nawaf's result was 49. What was Yasser's result?

اختار كل من بدر ونواف وياسر عدداً صحيحاً موجباً، قام كل واحد منهم بضرب عدده في كلٍّ من العددين اللذين اختارهما الآخران، ثم طرح الناتج الأصغر من الناتج الأكبر، كانت نتيجة بدر 1، ونتيجة نواف 49، ما هي نتيجة ياسر؟

Solution to Question 19:

Let Bader's, Nawaf's, and Yasser's numbers be a, b, c , respectively. Then, by the given information, $a \cdot |b - c| = 1$, $b \cdot |a - c| = 49$. From the first equation, $a = 1$, and from the second, $b(c - 1) = 49$. This means that either $b = 1, c = 50$ (which contradicts the first equality), or $b = 49, c = 2$ (similarly), or, finally, $b = 7, c = 8$. Therefore, Yasser will obtain $c \cdot |a - b| = 8 \cdot 6 = 48$.

حل السؤال 19:

لنفرض أن أعداد بدر ونواف وياسر هي على الترتيب a, b, c . من المعطيات: $a \cdot |b - c| = 1$ و $b \cdot |a - c| = 49$. من المعادلة الأولى نحصل على $a = 1$ ، ومن الثانية $b(c - 1) = 49$. وهذا يعني أن إما $b = 1, c = 50$ (وهذا يناقض المعادلة الأولى)، أو $b = 49, c = 2$ ، أو أخيراً $b = 7, c = 8$. إذن نتيجة ياسر هي $c \cdot |a - b| = 8 \cdot 6 = 48$.



Solution link



رابط الحل

Question 20

How many integer numbers k satisfy the following inequality?

كم عدد صحيح k يحقق المتباينة التالية؟

$$(k + 10)(4 - k)(k - 2)^2 > 0$$

Solution to Question 20:

We have $(k + 10)(4 - k) > 0$ and $k \neq 2$. Then $-10 < k < 4$ and $k \neq 2$. So, there are 12 numbers.

حل السؤال 20:

لدينا $(k + 10)(4 - k) > 0$ و $k \neq 2$. من المتباينة نحصل على $-10 < k < 4$ مع استثناء $k = 2$. الأعداد الصحيحة بين -9 و 3 عددها 13، وباستثناء 2 يصبح العدد 12.



Solution link

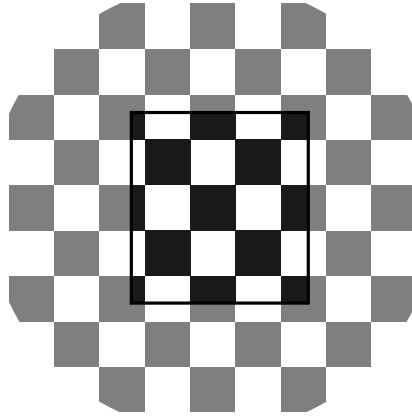


رابط الحل

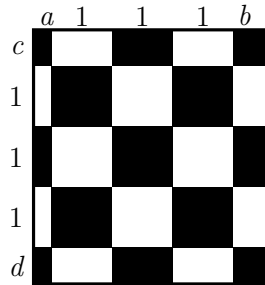
Question 21

We have a checkered tablecloth in which the sidelength of small squares is 1. A rectangle is cut from this tablecloth such that the sides of the rectangle are parallel to the sides of the squares, as shown in the figure. The total area of the white part of the rectangle is 10. What is the perimeter of the rectangle?

لدينا غطاء طاولة مقسم إلى مربعات (يشبه رقعة الشطرنج) طول ضلع كل مربع صغير 1، تم قص مستطيل أضلاعه موازية لأضلاع المربعات، كما هو موضح في الشكل، المساحة الإجمالية للجزء الأبيض من المستطيل هي 10، ما هو محيط هذا المستطيل؟

**Solution to Question 21:**

Let's denote the sides of the incomplete squares as a, b, c, d . The perimeter of the rectangle is then $2a + 2b + 2c + 2d + 12$. On the other hand, the white area is composed of the rectangles $1 \times a, 1 \times b, 1 \times c, 1 \times d$ taken twice as well as four 1×1 squares, hence $2a + 2b + 2c + 2d + 4 = 10$. Therefore, the perimeter is $10 - 4 + 12 = 18$.

**حل السؤال 21:**

لنرمز لأطوال أضلاع المربعات غير المكتملة بـ a, b, c, d . عندها محيط المستطيل يساوي $2a + 2b + 2c + 2d + 12$. من جهة أخرى، تتكون المساحة البيضاء من مستطيلات مساحتها $1 \times a, 1 \times b, 1 \times c, 1 \times d$ (كل منها يتكرر مرتين)، بالإضافة إلى أربعة مربعات مساحتها 1×1 ، لذا $2a + 2b + 2c + 2d + 4 = 10$. إذن المحيط يساوي $10 - 4 + 12 = 18$.



Solution link



رابط الحل

Question 22

Khalid wants to increase one of the numbers in the product $1447 \times 1448 \times 2025 \times 2030$ by adding 1 (he can increase either 1447, 1448, 2025, or 2030). Which number should he increase to make the new product as large as possible?

يريد خالد زيادة أحد الأرقام في حاصل الضرب $1447 \times 1448 \times 2025 \times 2030$ بإضافة 1 (يمكنه زيادة 1447 أو 1448 أو 2025 أو 2030)، ما هو الرقم الذي يجب أن يزيد ليحصل حاصل الضرب الجديد أكبر ما يمكن؟

Solution to Question 22:

Let us write the product as

$$1447 \times 1448 \times 2025 \times 2030 = 1447w = 1448x = 2025y = 2030z,$$

so that

$$w > x > y > z.$$

Hence, adding 1 to a number in the product means adding w, x, y or z to the result, which means he should increase 1447 by 1 because w is the largest.

حل السؤال 22:

لنكتب حاصل الضرب على الصورة

$$1447 \times 1448 \times 2025 \times 2030 = 1447w = 1448x = 2025y = 2030z,$$

بحيث

$$w > x > y > z.$$

عند زيادة أحد العوامل بمقدار 1 فإن مقدار الزيادة في حاصل الضرب يساوي w أو x أو y أو z بحسب العامل الذي زدناه. ولأن w هو الأكبر، فإن أكبر زيادة تحصل عند زيادة 1447 بمقدار 1.



Solution link



رابط الحل

Question 23

For a two-digit number n , both $154 - n$ and $89 - n$ are prime numbers. Find the sum of the digits of n .

إذا كان n عدداً مكوناً من خانتين وكان كل من $154 - n$ و $89 - n$ عدداً أولياً، أوجد مجموع أرقام العدد n .

Solution to Question 23:

Since $(154 - n) - (89 - n) = 65$ is an odd number, one of these two prime numbers must be even. The only even prime is 2, so the smaller prime number equals 2. Hence $89 - n = 2$, thus $n = 87$. Indeed, for $n = 87$ both $154 - 87 = 67$ and $89 - 87 = 2$ are prime. So, $8 + 7 = 15$.

حل السؤال 23:

بما أن $(154 - n) - (89 - n) = 65$ عدد فردي، فلا بد أن يكون أحد العددين الأولين زوجياً. والعدد الأولي الزوجي الوحيد هو 2، إذن العدد الأصغر يساوي 2. لذلك $89 - n = 2$ ومنه $n = 87$. وبالفعل: $154 - 87 = 67$ و $89 - 87 = 2$ عددان أوليان، وبالتالي مجموع أرقام n هو $8 + 7 = 15$.



Solution link



رابط الحل

Question 24

Let $f(x) = (ax^2 + x + 3)(ax^2 + x + 5)$. If $f(-3) = -1$ what is the value of $f(3)$?

ليكن $f(x) = (ax^2 + x + 3)(ax^2 + x + 5)$ ، إذا كان $f(-3) = -1$ ما هي قيمة $f(3)$ ؟

Solution to Question 24:

Since $f(-3) = 9a(9a + 2) = -1$, it follows that $(9a + 1)^2 = 0$, yielding $a = -1/9$. Then, $f(3) = (9a + 6)(9a + 8) = 5 \cdot 7 = 35$.

حل السؤال 24:

بما أن $f(-3) = 9a(9a + 2) = -1$ فإن $(9a + 1)^2 = 0$ ، ومنه $a = -\frac{1}{9}$. عندها $f(3) = (9a + 6)(9a + 8) = 5 \cdot 7 = 35$.



Solution link



رابط الحل

Question 25

Two integer numbers were added to the list $[2, 2, 9, 15, 32]$ so that the range doubled, while the average remained unchanged. What is the larger of the two added numbers?

أضيف عددين صحيحين إلى القائمة $[2, 2, 9, 15, 32]$ بحيث تضاعف المدى بينما لم يتغير المتوسط الحسابي، ما هو أكبر العددين المضافين؟

Solution to Question 25:

Let the two added numbers be $x > y$. Since the average remained unchanged, we have $x + y = 12 \cdot 2 = 24$. Since the range doubled, we have either $x - y = 60$, or $x = 62, y \geq 2$, or $x \leq 32, y = -28$. The last two choices are impossible since $x + y = 24$. Thus we have $x - y = 60$, hence $x = 42$ and $y = -18$.

حل السؤال 25:

ليكن العددين المضافان $x > y$. بما أن المتوسط لم يتغير فإن مجموع الأعداد السبعة يساوي $7 \cdot 12 = 84$ ، ومجموع الأعداد الخمسة الأصلية هو 60، لذا $x + y = 24$. وبما أن المدى الأصلي هو $32 - 2 = 30$ وقد تضاعف، فالمدى الجديد يساوي 60. لكي يصبح المدى 60 يلزم أن يكون $x - y = 60$ (إذ لا يمكن أن تتحقق الحالتان الأخرتان مع شرط $x + y = 24$). إذن من حل النظام $x + y = 24$ و $x - y = 60$ نحصل على $x = 42$ و $y = -18$.



Solution link

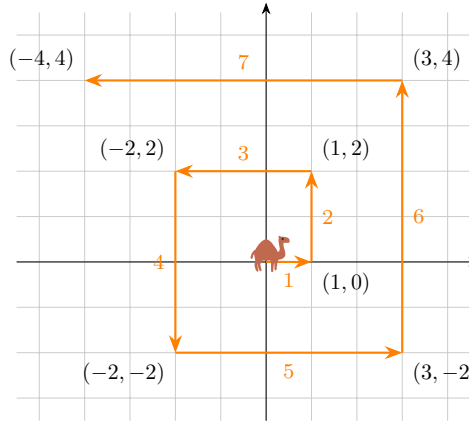


رابط الحل

Question 26

A camel starts at $(0, 0)$ and moves as follows: It moves 1 unit right, 2 units up, 3 units left, 4 units down, then continues 5 units right, 6 units up, ... (the first seven moves are shown below). Find its coordinates after the 2025th move.

يبدأ جمل عند النقطة $(0, 0)$ ويتحرك كالتالي: يتحرك وحدة واحدة يميناً، ثم وحدتين للأعلى، ثم 3 وحدات يساراً، ثم 4 وحدات للأسفل، ثم يكمل 5 وحدات يميناً، ثم 6 وحدات للأعلى، وهكذا... (يظهر أدناه أول سبع حركات)، أوجد إحداثياته بعد الحركة رقم 2025.

**Solution to Question 26:**

Let (a, b) be the position after move 2025. First, we determine a . If the camel moves some units left (or right), its x -coordinate decreases (or increases) same amount of units. Vertical moves leave x -coordinate unchanged. At the beginning the x -coordinate is 0. So, we have

$$\begin{aligned} a &= 1 - 3 + 5 - 7 + \dots - 2023 + 2025 \\ &= 1 + (-3 + 5) + \dots + (-2023 + 2025) \\ &= 1 + 2 \cdot 506 = 1013. \end{aligned}$$

Similarly, we determine b ,

$$\begin{aligned} b &= 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 2022 - 2024 \\ &= (2 - 4) + (6 - 8) + \dots + (2022 - 2024) \\ &= -1012. \end{aligned}$$

So, $(a, b) = (1013, -1012)$.

حل السؤال 26:

لنفرض أن (a, b) هي إحداثيات الجمل بعد الحركة رقم 2025. أولاً نجد a (الإحداثي السيني). الحركات الأفقية فقط تغير قيمة x ؛ في البداية $x = 0$ ، إذن

$$\begin{aligned} a &= 1 - 3 + 5 - 7 + \dots - 2023 + 2025 \\ &= 1 + (-3 + 5) + \dots + (-2023 + 2025) \\ &= 1 + 2 \cdot 506 = 1013. \end{aligned}$$

وبالمثل نجد b (الإحداثي الصادي):

$$\begin{aligned} b &= 2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 2022 - 2024 \\ &= (2 - 4) + (6 - 8) + \dots + (2022 - 2024) \\ &= -1012. \end{aligned}$$

إذن $(a, b) = (1013, -1012)$.



Solution link



رابط الحل

Question 27

Positive real numbers x , y , and t satisfy the following system. What is the value of t ?

الأعداد الحقيقية الموجبة x و y و t تحقق النظام التالي، ما هي قيمة t ؟

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + 6 \\ (x + y)(t - 1) = 30 \\ (x - y)(t + 1) = 16 \end{cases}$$

Solution to Question 27:

By multiplying the second and third equations, we get $(x^2 - y^2)(t^2 - 1) = 480$, and the first equation gives us that $x^2 - y^2 = 6$, so $t^2 - 1 = \frac{480}{6} = 80 \Rightarrow t^2 = 81 \Rightarrow t = 9$.

حل السؤال 27:

بضرب المعادلتين الثانية والثالثة نحصل على $(x^2 - y^2)(t^2 - 1) = 480$. ومن المعادلة الأولى $x^2 - y^2 = 6$ ، لذا

$$t^2 - 1 = \frac{480}{6} = 80 \Rightarrow t^2 = 81 \Rightarrow t = 9$$



Solution link

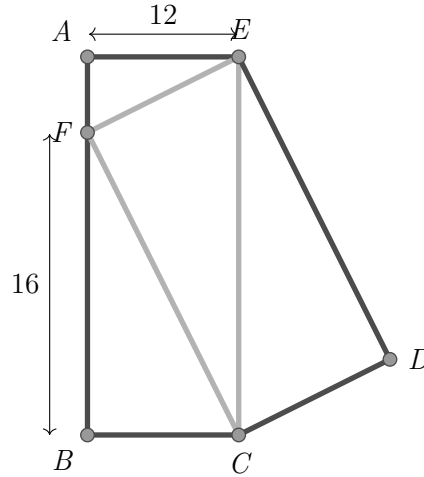


رابط الحل

Question 28

In the figure, pentagon $ABCDE$ is formed by two overlapping rectangles. Based on the labeled lengths in the diagram, what is the perimeter of the pentagon?

في الشكل أدناه، الشكل الخماسي $ABCDE$ مكون من مستطيلين متداخلين، بناءً على الأطوال الموضحة في الرسم، ما هو محيط الشكل الخماسي؟



Solution to Question 28:

Triangles AEF and BFC are similar, and $BC = AE = 12$, so $AF = 9$. By the Pythagorean theorem, $EF = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ and $FC = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$, so the pentagon's perimeter is $16 + 9 + 2 \cdot 12 + 15 + 20 = 84$.

حل السؤال 28:

المثلثان AEF و BFC متشابهان، ومع $BC = AE = 12$ نستنتج أن $AF = 9$. وباستخدام نظرية فيثاغورس: $EF = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ و $FC = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$. إذن محيط الشكل الخماسي هو $16 + 9 + 2 \cdot 12 + 15 + 20 = 84$.



Solution link



رابط الحل

Question 29

Let a and b be positive integers such that exactly three of the following statements are true and one is false:

- (1) $a + 7$ is divisible by b .
- (2) $a = 5b + 2$.
- (3) $a + b$ is divisible by 3.
- (4) $a + 4b$ is a prime number.

Find the largest possible value of $a + b$.

ليكن a و b عدداً صحيحان موجبان بحيث أن ثلاث عبارات بالضبط من العبارات التالية صحيحة وواحدة فقط خاطئة:

$$(1) \ a + 7 \text{ يقبل القسمة على } b.$$

$$(2) \ a = 5b + 2$$

$$(3) \ a + b \text{ يقبل القسمة على } 3.$$

$$(4) \ a + 4b \text{ عدد أولي.}$$

أوجد أكبر قيمة ممكنة للمقدار $a + b$.

Solution to Question 29:

Both (2) and (3) can not be true, because $a + b = 6b + 2$ is not divisible by 3. Also, both (3) and (4) can not be true, because $a + 4b = (a + b) + 3b$ can not be prime greater than 3 and multiple of 3. Therefore, (3) is the only false statement. (1) and (2), implies that $a + 7 = 5b + 9$ is divisible by b , so $b = 1, 3, 9$. Then $a = 7, 17, 47$ and it easy to check that these hold. So, $(a, b) = (7, 1), (17, 3), (47, 9)$ and $\max(a + b) = 47 + 9 = 56$.

حل السؤال 29:

لا يمكن أن تكون العبارتان (2) و (3) صحيحتين معاً، لأن $a + b = 6b + 2$ لا يقبل القسمة على 3. وكذلك لا يمكن أن تكون العبارتان (3) و (4) صحيحتين معاً، لأن $a + 4b = (a + b) + 3b$ سيكون من مضاعفات 3، ولا يمكن أن يكون عدداً أولياً أكبر من 3. إذن العبارة الوحيدة الخاطئة هي (3). بما أن (1) و (2) صحيحتان، فإن $a + 7 = 5b + 9$ يقبل القسمة على b ، وهذا يعطي $b = 1, 3, 9$. عندها $a = 7, 17, 47$ ، ويمكن التحقق بسهولة من تحقق الشروط. إذن الأزواج الممكنة هي $(a, b) = (7, 1), (17, 3), (47, 9)$ وأكبر قيمة لـ $a + b$ هي $47 + 9 = 56$.



Solution link

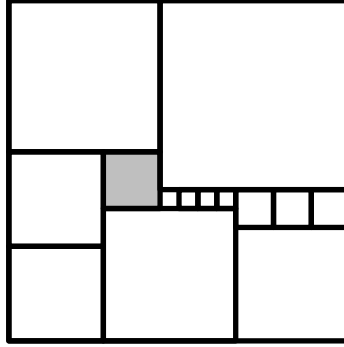


رابط الحل

Question 30

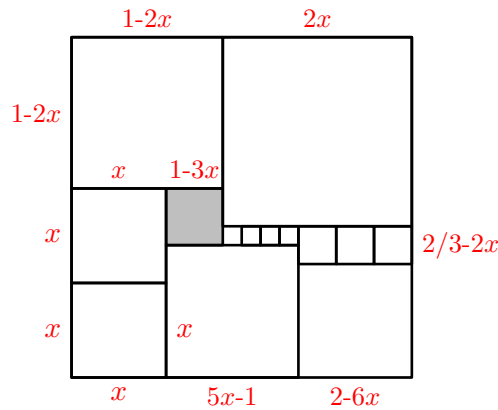
A square of sidelength 1 is dissected into 14 smaller squares, see below. Find the area of the shaded square.

مربع طول ضلعه 1 قُسم إلى 14 مربعاً أصغر، (كما موضح أدناه) أوجد مساحة المربع المظلل.



Solution to Question 30:

Let x be the sidelength of the left-bottom square. Then the sidelengths of the other squares can be uniquely determined as shown in the figure below. For example, the sidelength of the right-middle square is one-third of the right-below square, so it is $2/3 - 2x$.



Summing all the lengths on the right side of the big square, we obtain

$$2x + \left(\frac{2}{3} - 2x \right) + (2 - 6x) = 1.$$

Solving this equation, we get $x = \frac{5}{18}$. Hence the side of the shaded square is $1 - 3x = \frac{1}{6}$ and its area is $\frac{1}{36}$.

حل السؤال 30:

ليكن x طول ضلع المربع الموجود في أسفل اليسار. عندها يمكن تحديد أطوال أضلاع بقية المربعات بشكل وحيد كما في الشكل. مثلاً طول ضلع المربع في منتصف اليمين يساوي ثلث طول ضلع المربع الذي تحته، ولذلك يساوي $2/3 - 2x$.
بجمع الأطوال على الضلع الأيمن للمربع الكبير نحصل على

$$2x + \left(\frac{2}{3} - 2x\right) + (2 - 6x) = 1.$$

بحل هذه المعادلة نجد $x = \frac{5}{18}$. ومن ثم طول ضلع المربع المظلل هو $1 - 3x = \frac{1}{6}$ ومساحته $\frac{1}{36}$.



Solution link



رابط الحل

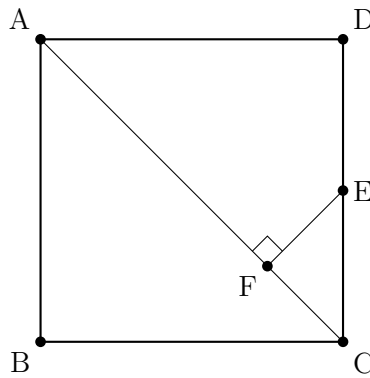
Solutions to Juniors Track Questions-Second Round

حلول أسئلة مسار الناشئين - المرحلة الثانية

Question 1

In the figure below, $ABCD$ is a square with side length 2. E is the midpoint of CD and F lies on AC such that $EF \perp AC$. Find the length of AF .

في الشكل أدناه، $ABCD$ مربع ضلعه 2، E هي نقطة منتصف CD ، والنقطة F تقع على AC بحيث يكون $EF \perp AC$. أوجد طول AF .



Solution to Question 1:

By the Pythagorean theorem, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Since $\angle FCE = 45^\circ$ and $\angle EFC = 90^\circ$, $\triangle EFC$ is an isosceles right triangle. Therefore, $CF = EF$ and $CF^2 + EF^2 = CE^2 = 1$ (by Pythagorean theorem) implies $CF = EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Therefore, $AF = AC - CF = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

حل السؤال 1:

باستعمال نظرية فيثاغورس، فإن $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. وبما أن $\angle FCE = 45^\circ$ و $\angle EFC = 90^\circ$ ، فإن $\triangle EFC$ هو مثلث قائم الزاوية ومتطابق الضلعين. ومنه، فإن $CF = EF$ و $1 = CF^2 + EF^2$ (باستعمال نظرية فيثاغورس) مما يعني أن $CF = EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$. وبالتالي، فإن $\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = AC - CF = AF$.



Solution link



رابط الحل

Question 2

Find the values of x and y that solve the following system of equations:

أوجد قيم x و y التي تحقق نظام المعادلات التالي:

$$\begin{cases} \frac{x-2025}{x-2026} = \frac{y-1447}{y-1448} \\ x(y+13) = y(x+30) \end{cases}$$

Solution to Question 2:

Equation 1 gives:

$$\begin{aligned} \frac{x-2026+1}{x-2026} &= \frac{y-1448+1}{y-1448} \implies 1 + \frac{1}{x-2026} = 1 + \frac{1}{y-1448} \\ \implies x-2026 &= y-1448 \implies x = y + 578 \end{aligned}$$

Equation 2 gives:

$$\begin{aligned} x(y+13) &= y(x+30) \implies xy + 13x = xy + 30y \\ \implies 13x &= 30y \implies y = \frac{13}{30}x \\ \implies x &= y + 578 = \frac{13}{30}x + 578 \implies \frac{17}{30}x = 578 \\ \implies x &= \frac{30}{17} \cdot 578 = \frac{30}{17} \cdot 2 \cdot 17^2 = 60 \cdot 17 = 1020 \\ \text{and } y &= \frac{13}{30}x = \frac{13}{30} \cdot 1020 = \frac{13}{30} \cdot 10 \cdot 3 \cdot 34 = 13 \cdot 34 = 442 \end{aligned}$$

Therefore, $x = 1020$ and $y = 442$.

Alternative Solutions:

- *Cross-Multiplication (Eq 1):* Students may expand $(x-2025)(y-1448) = (y-1447)(x-2026)$. It also simplifies to $x - y = 578$.
- *Parametric Approach:* From Eq 2, let $x = 30k$ and $y = 13k$. Substituting into Eq 1 leads to $30k - 2026 = 13k - 1448 \implies 17k = 578 \implies k = 34$. This is an efficient alternative.

حل السؤال 2:

تعطي المعادلة 1:

$$\begin{aligned} \frac{x-2026+1}{x-2026} &= \frac{y-1448+1}{y-1448} \implies 1 + \frac{1}{x-2026} = 1 + \frac{1}{y-1448} \\ \implies x-2026 &= y-1448 \implies x = y + 578 \end{aligned}$$

تعطي المعادلة 2:

$$\begin{aligned} x(y + 13) &= y(x + 30) \implies xy + 13x = xy + 30y \\ \implies 13x &= 30y \implies y = \frac{13}{30}x \\ \implies x &= y + 578 = \frac{13}{30}x + 578 \implies \frac{17}{30}x = 578 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies x &= \frac{30}{17} \cdot 578 = \frac{30}{17} \cdot 2 \cdot 17^2 = 60 \cdot 17 = 1020 \\ \text{و } y &= \frac{13}{30}x = \frac{13}{30} \cdot 1020 = \frac{13}{30} \cdot 10 \cdot 3 \cdot 34 = 13 \cdot 34 = 442 \end{aligned}$$

وبالتالي، $x = 1020$ و $y = 442$.
حلول بديلة:

• الضرب التبادلي (المعادلة 1): يمكن للطلاب فك $(x - 2025)(y - 1448) = (y - 1447)(x - 2026)$ ، وهي تنبسط أيضاً إلى $x - y = 578$.

• النهج البارامتري: من المعادلة 2، نفرض أن $x = 30k$ و $y = 13k$. بالتعويض في المعادلة 1 نصل إلى $30k - 2026 = 13k - 1448 \implies 17k = 578 \implies k = 34$. وهذا بديل فعال.



Solution link



رابط الحل

Question 3

Find the number of triples (x, y, z) of integers satisfying the following inequality:

أوجد عدد الثلاثيات (x, y, z) من الأعداد الصحيحة التي تحقق المتباينة التالية:

$$x^2 + 2|y| + 3^{|z|} \leq 8.$$

Solution to Question 3:

Since the summand term $3^{|z|}$ is less or equal than 8, we get $|z| \leq 1$. Consider two cases.

Case 1. Let $z = 0$, then $x^2 + 2|y| \leq 7$. This implies $x = 0, \pm 1, \pm 2$.

- For $x = 0$, we get $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
- For $x = \pm 1$, we get $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
- For $x = \pm 2$, we get $y = 0, \pm 1$.

Totally, $7 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 27$.

Case 2. Let $z = \pm 1$, then $x^2 + 2|y| \leq 5$. This implies $x = 0, \pm 1, \pm 2$.

- For $x = 0$, we get $y = 0, \pm 1, \pm 2$.
- For $x = \pm 1$, we get $y = 0, \pm 1, \pm 2$.
- For $x = \pm 2$, we get $y = 0$.

Totally, $2(5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1) = 34$.

Hence, there are $27 + 34 = 61$ triples (x, y, z) .

حل السؤال 3:

بما أن الحد $3^{|z|}$ أصغر من أو يساوي 8، فإننا نحصل على $|z| \leq 1$. لنناقش حالتين:
الحالة 1. ليكن $z = 0$ عندها $x^2 + 2|y| \leq 7$. وهذا يقتضي أن $x = 0, \pm 1, \pm 2$.

• إذا كان $x = 0$ ، نحصل على $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

• إذا كان $x = \pm 1$ ، نحصل على $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

• إذا كان $x = \pm 2$ ، نحصل على $y = 0, \pm 1$.

المجموع هو $7 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 27$.

الحالة 2. ليكن $z = \pm 1$ ، عندها $x^2 + 2|y| \leq 5$. وهذا يقتضي أن $x = 0, \pm 1, \pm 2$.

• إذا كان $x = 0$ ، نحصل على $y = 0, \pm 1, \pm 2$.

• إذا كان $x = \pm 1$ ، نحصل على $y = 0, \pm 1, \pm 2$.

• إذا كان $x = \pm 2$ ، نحصل على $y = 0$.

المجموع هو $2(5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 1) = 34$
بناءً على ذلك، هناك $27 + 34 = 61$ ثلاثية (x, y, z) .



Solution link



رابط الحل

Question 4

Let $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{15} = 144$ be all the positive divisors of 144. Find the sum

$$\frac{1}{d_1 + 12} + \dots + \frac{1}{d_{15} + 12}$$

as a fraction in its simplest form.

لتكن $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{15} = 144$ جميع القواسم الموجبة للعدد 144. أوجد المجموع

$$\frac{1}{d_1 + 12} + \dots + \frac{1}{d_{15} + 12}$$

في صورة كسر على أبسط صورة.

Solution to Question 4:

Since $d_i \cdot d_{16-i} = 144$ for $i = 1, 2, \dots, 7$, we have

$$\frac{1}{d_i + 12} + \frac{1}{d_{16-i} + 12} = \frac{1}{d_i + 12} + \frac{1}{\frac{144}{d_i} + 12} = \frac{1}{d_i + 12} + \frac{d_i}{12(d_i + 12)} = \frac{1}{12}.$$

This means that pairing the first seven fractions with the last seven, we get $7 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$. Adding the middle fraction which is $\frac{1}{24}$, we obtain $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

Solution 2. Explicit form of the sum is

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24} + \frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \frac{1}{36} + \frac{1}{48} + \frac{1}{60} + \frac{1}{84} + \frac{1}{156}.$$

We use the identity $\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} = \frac{1}{n}$ to decrease the number of fractions. For instance, $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} = \frac{1}{10}$ and $\frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{8}$ reduce the terms

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{84} + \frac{1}{156} + \frac{1}{10} + \frac{1}{8}.$$

Now we consider the fractions with denominators multiple of 5, 7 and 13. For instance, $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$, $\frac{1}{14} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84} = \frac{6+4+3+1}{84} = \frac{1}{6}$ and $\frac{1}{13} + \frac{1}{156} = \frac{1}{12}$ give

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}.$$

This is equal to $\frac{2+1+6+6+3}{36} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

حل السؤال 4:

بما أن $d_i \cdot d_{16-i} = 144$ لكل $i = 1, 2, \dots, 7$ ، فإننا نحصل على:

$$\frac{1}{d_i + 12} + \frac{1}{d_{16-i} + 12} = \frac{1}{d_i + 12} + \frac{1}{\frac{144}{d_i} + 12} = \frac{1}{d_i + 12} + \frac{d_i}{12(d_i + 12)} = \frac{1}{12}$$

وهذا يعني أنه من خلال تجميع الكسور السبعة الأولى مع الكسور السبعة الأخيرة في أزواج، نحصل على $7 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$. وبإضافة الكسر الأوسط وهو $\frac{1}{24}$ ، نحصل على $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.



Solution link



رابط الحل

Question 5

Each of the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 is placed exactly once into the equality squares

$$\square\square + \square\square + \square + \square + \square = \square\square$$

so that the equation holds. Here, $\square\square$ means a two-digit number and $\square$ means a one-digit number. Find all possible values of the two-digit number on the right-hand side of equality.

يتم وضع كل من الأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 مرة واحدة بالضبط في المربعات أدناه

$$\square\square + \square\square + \square + \square + \square = \square\square$$

بحيث تتحقق المعادلة، (هنا، $\square\square$ يمثل عدداً مكوناً من خانتين و $\square$ يمثل عدداً مكوناً من خانة واحدة) أوجد جميع القيم الممكنة للعدد المكون من خانتين في الطرف الأيمن من المساواة.

Solution to Question 5:

Write the equality as

$$\overline{ab} + \overline{cd} + e + f + g = \overline{hi},$$

where $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ are the digits 1, 2, ..., 9. Using $\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{cd} = 10c + d$, $\overline{hi} = 10h + i$, and $(a + b) + (c + d) + e + f + g = 45 - h - i$, we arrive at

$$9(a + c + 5 - h) = 2(h + i).$$

This means that $h + i$ is divisible by 9 and from $3 \leq h + i \leq 17$, we get $h + i = 9$. Then $a + c + 3 = h$. Since $a + c \geq 3$, we have $h = 6, 7, 8$. Consider three cases.

Case 1. If $h = 6$, then $i = 9 - h = 3$. Hence, $\overline{hi} = 63$ and we have

$$14 + 25 + 7 + 8 + 9 = 63.$$

Case 2. If $h = 7$, then $i = 9 - h = 2$. Hence, $\overline{hi} = 72$ and we have

$$14 + 35 + 6 + 8 + 9 = 72.$$

Case 3. If $h = 8$, then $i = 9 - h = 1$. Hence, $\overline{hi} = 81$ and we have

$$24 + 35 + 6 + 7 + 9 = 81.$$

Therefore, all possible values for the desired two-digit number are 63, 72, 81.

حل السؤال 5:

نكتب المساواة على النحو التالي:

$$\overline{ab} + \overline{cd} + e + f + g = \overline{hi},$$

حيث $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ هي الأرقام 1, 2, ..., 9. باستخدام $\overline{ab} = 10a + b$ و $\overline{cd} = 10c + d$ و $\overline{hi} = 10h + i$ ، وبما أن $(a + b) + (c + d) + e + f + g = 45 - h - i$ ، نصل إلى:

$$9(a + c + 5 - h) = 2(h + i).$$

هذا يعني أن $h+i$ يقبل القسمة على 9، ومن خلال $3 \leq h+i \leq 17$ ، نجد أن $h+i=9$ ، ومنها $a+c+3=h$. وبما أن $a+c \geq 3$ ، فإن $h=6, 7, 8$. لنناقش ثلاث حالات:
الحالة 1. إذا كان $h=6$ ، فإن $i=9-h=3$ ، ومنه $\overline{hi}=63$ ويكون لدينا:

$$14 + 25 + 7 + 8 + 9 = 63.$$

الحالة 2. إذا كان $h=7$ ، فإن $i=9-h=2$ ، ومنه $\overline{hi}=72$ ويكون لدينا:

$$14 + 35 + 6 + 8 + 9 = 72.$$

الحالة 3. إذا كان $h=8$ ، فإن $i=9-h=1$ ، ومنه $\overline{hi}=81$ ويكون لدينا:

$$24 + 35 + 6 + 7 + 9 = 81.$$

وبالتالي، فإن جميع القيم الممكنة للعدد المطلوب المكون من رقمين هي 63, 72, 81.



Solution link

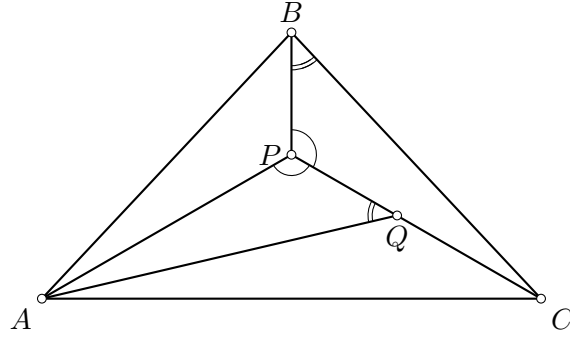


رابط الحل

Question 6

In the diagram below, point Q lies on segment PC such that $\triangle APQ$ and $\triangle CPB$ are congruent triangles. Let $\angle BAC = \angle BCA = 37^\circ$. Find $\angle PAQ$.

في الشكل أدناه، النقطة Q تقع على القطعة المستقيمة PC بحيث يكون المثلثان $\triangle APQ$ و $\triangle CPB$ متطابقين، ليكن $\angle BAC = \angle BCA = 37^\circ$ ، أوجد قياس الزاوية $\angle PAQ$.

**Solution to Question 6:**

The congruence condition and the equality of angles imply that $AP = PC$ and $AB = BC$. Thus, points A and C are symmetric with respect to BP . Hence, $\angle APB = \angle CPB = \angle APC = 360^\circ/3 = 120^\circ$ and $\angle ABP = \angle CBP = \angle ABC/2 = (180^\circ - 2 \cdot 37^\circ)/2 = 53^\circ$. Then, $\angle PAQ = 180^\circ - \angle CBP - \angle BPC = 7^\circ$.

حل السؤال 6:

شرطي التطابق وتساوي الزوايا تقتضي أن $AP = PC$ و $AB = BC$ ، إذا النقطتين A و C متماثلتان بالنسبة للمستقيم BP . ومنه، يكون $\angle APB = \angle CPB = \angle APC = 360^\circ/3 = 120^\circ$ ، وتكون الزاوية $\angle ABP = \angle CBP = \angle ABC/2 = (180^\circ - 2 \cdot 37^\circ)/2 = 53^\circ$. إذن، $\angle PAQ = 180^\circ - \angle CBP - \angle BPC = 7^\circ$.



Solution link



رابط الحل

Question 7

More than 39 %, but less than 40 % of the members of a chess club are boys. If one of the girls decided to leave the club, the percentage of boys would still be under 40 %, but if a new boy joined the club instead, the percentage would be at least 40 %. What is the smallest possible number of current members of the club?

أكثر من 39% ، ولكن أقل من 40% من أعضاء نادي الشطرنج هم من الأولاد. إذا قررت إحدى الفتيات مغادرة النادي، فستظل نسبة الأولاد أقل من 40% ، ولكن إذا انضم ولد جديد إلى النادي بدلاً من ذلك، فستكون النسبة 40% على الأقل. ما هو أصغر عدد ممكن للأعضاء الحاليين في النادي؟

Solution to Question 7:

Let n be the total number of members and a the number of boys. We have inequalities

$$\begin{aligned}\frac{a}{n} &> 0.39 \\ \frac{a}{n-1} &< 0.4 \\ \frac{a+1}{n+1} &\geq 0.4\end{aligned}$$

Rearranging the second and the third and multiplying by 5 yields

$$2n - 2 > 5a \geq 2n - 3$$

and since $5a$ is an integer and $2n - 2$, $2n - 3$ are consecutive integers, $5a = 2n - 3$ must hold. Plugging this into the first inequality and solving for n produces $n > 60$. For $a = \frac{1}{5}(2n - 3)$ to be an integer, the smallest possible value of n is 64.

حل السؤال 7:

بفرض أن n هو إجمالي عدد الأعضاء و a هو عدد الأولاد. لدينا المتباينات التالية:

$$\begin{aligned}\frac{a}{n} &> 0.39 \\ \frac{a}{n-1} &< 0.4 \\ \frac{a+1}{n+1} &\geq 0.4\end{aligned}$$

بإعادة ترتيب المتباينتين الثانية والثالثة والضرب في 5 نجد أن:

$$2n - 2 > 5a \geq 2n - 3$$

وبما أن $5a$ عدد صحيح، و $2n - 2$ و $2n - 3$ عددين صحيحان متتاليان، فيجب أن تكون العلاقة $5a = 2n - 3$ صحيحة. بالتعويض في المتباينة الأولى وحلها بالنسبة لـ n نجد أن $n > 60$. ولكي يكون $a = \frac{1}{5}(2n - 3)$ عدداً صحيحاً، فإن أصغر قيمة ممكنة لـ n هي 64.



Solution link



رابط الحل

Question 8

The sum of 15 distinct numbers chosen from a set of 17 consecutive integers is 2026. Find all possible sets of such 17 consecutive integers.

لدينا 17 عدد صحيح متتالي، اختر من 15 عدداً مختلفاً مجموعهم 2026. أوجد جميع القيم الممكنة لهذه المجموعة المكونة من 17 عدد صحيح متتالي.

Solution to Question 8:

Let the 17 consecutive integers be $n, n+1, \dots, n+16$. Their total sum equals $17n+136$. Suppose that two omitted numbers are $n+a$ and $n+b$ where $0 \leq a < b \leq 16$. Then the sum of the remaining 15 numbers is $15n+136-a-b=2026$ or equivalently $a+b+1890=15n$. This means $a+b$ is divisible by 15. Because of $1 \leq a+b \leq 31$, the only possibilities are $a+b=15$ and $a+b=30$. Consider two cases.

Case 1. If $a+b=15$, then $n=127$, and the 17 integers are 127, 128, ..., 143.

Case 2. If $a+b=30$, then $n=128$, and the 17 integers are 128, 129, ..., 144.

حل السؤال 8:

لنفرض أن الـ 17 عدد المتتالية هي $n, n+1, \dots, n+16$. مجموعها الكلي يساوي $17n+136$. لنفترض أن العددين المحذوفين هما $n+a$ و $n+b$ حيث $0 \leq a < b \leq 16$. حينها سيصبح مجموع الـ 15 عدداً المتبقية هو $15n+136-a-b=2026$ أو ما يعادل $a+b+1890=15n$. وهذا يعني أن $a+b$ يقبل القسمة على 15. وبما أن $1 \leq a+b \leq 31$ ، فإن الاحتمالات الوحيدة هي $a+b=15$ و $a+b=30$. لنناقش حالتين:

الحالة 1. إذا كان $a+b=15$ ، فإن $n=127$ ، وتكون الأعداد الـ 17 هي 127, 128, ..., 143.

الحالة 2. إذا كان $a+b=30$ ، فإن $n=128$ ، وتكون الأعداد الـ 17 هي 128, 129, ..., 144.



Solution link



رابط الحل

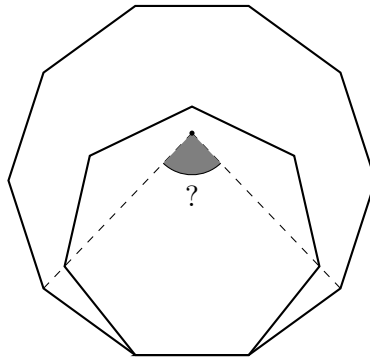
Solutions to Seniors Track Questions-Second Round

حلول أسئلة مسار الشباب - المرحلة الثانية

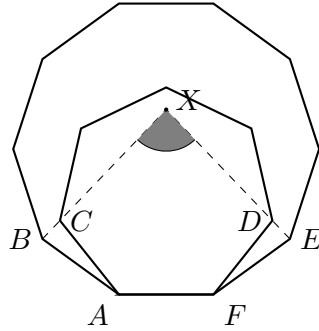
Question 1

In the figure below, we have two regular polygons. What is the measure of the shaded angle?

في الشكل أدناه، لدينا مضلعين منتظمين، ما هو قياس الزاوية المظللة؟



Solution to Question 1:



Since polygons have equal side length, the $\triangle ABC$ and $\triangle DFE$ are isosceles. Let M, N be the midpoints of BC, DE . The pentagon $XMAFN$ has two right angles at M, N and the sum of its angles at A, F is equal to the sum of interior angles of the given polygons. Indeed, $\angle MAC + \angle DFN + \angle CAF + \angle DFA = \angle BAF + \angle DFA$. Since the given polygons have angles $\frac{(10-2)\pi}{10} = \frac{4\pi}{5}$ and $\frac{(7-2)\pi}{7} = \frac{5\pi}{7}$, we obtain that $\angle X = 3\pi - \pi - \frac{4\pi}{5} - \frac{5\pi}{7} = \frac{17\pi}{35}$.

حل السؤال 1:

بما أن المضلعين لهما نفس طول الضلع، فإن المثلثين $\triangle DFE$ و $\triangle ABC$ متطابقا الضلعين. ليكن M, N هما منصفاه الضلعين BC و DE على التوالي. انخاسي $XMAFN$ له زاويتان قائمتان عند M و N ، ومجموع زواياه عند A و F يساوي مجموع الزوايا الداخلية للمضلعين المعطيين. وبالفعل، فإن $\angle MAC + \angle DFN + \angle CAF + \angle DFA = \angle BAF + \angle DFA$.

وبما أن المضلعين المعطيين لهما زوايا قياسها $\frac{4\pi}{5} = \frac{(10-2)\pi}{10}$ و $\frac{5\pi}{7} = \frac{(7-2)\pi}{7}$ ، فإننا نحصل
على $\angle X = 3\pi - \pi - \frac{4\pi}{5} - \frac{5\pi}{7} = \frac{17\pi}{35}$. $\angle BAF + \angle DFA$



Solution link



رابط الحل

Question 2Find all solutions x of:أوجد جميع الحلول x للمعادلة:

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{4x-11} = 1$$

Solution to Question 2:

Rewriting the equation as $\sqrt{x-1} - 1 = \sqrt{4x-11}$ and squaring both sides, we obtain (after simplification) $2\sqrt{x-1} = 11 - 3x$. Squaring again, we get the quadratic equation $9x^2 - 70x + 125 = 0$ whose discriminant is $\Delta = 4900 - 4500 = 20^2$. Hence, the roots are $x_1 = 10$ and $x_2 = \frac{25}{9}$. Checking these solutions, we find that $\frac{25}{9}$ is the only valid solution.

حل السؤال 2:

بإعادة كتابة المعادلة على الصورة $\sqrt{x-1} - 1 = \sqrt{4x-11}$ وتربيع الطرفين، نحصل (بعد التبسيط) على $2\sqrt{x-1} = 11 - 3x$. وبالتربيع مرة أخرى، نحصل على المعادلة التربيعية $9x^2 - 70x + 125 = 0$ التي مميزها هو $\Delta = 4900 - 4500 = 20^2$. ومنه، تكون الجذور هي $x_1 = 10$ و $x_2 = \frac{25}{9}$. وبالتحقق من هذه الحلول، نجد أن $\frac{25}{9}$ هو الحل الوحيد الصحيح.



Solution link



رابط الحل

Question 3

Let $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ denote the sum of the first n perfect squares. Recall that this sum is given by the formula: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Jumana lists, in increasing order, all positive integers n for which S_n is divisible by 7. The sequence begins 3, 6, 7, $\dots$. What is the 2026th number in her list?

ليكن $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ هو مجموع أول n من المربعات الكاملة، نعرف أن هذا المجموع يُعطى أيضاً بالقاعدة: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. قامت جمانة بكتابة جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n (بالترتيب التصاعدي) بحيث S_n يقبل القسمة على 7، تبدأ المتتالية بـ 3, 6, 7, $\dots$ ، ما هو العدد الذي ترتيبه 2026 في قائمتها؟

Solution to Question 3:

Divisibility of S_n by 7 is equivalent to the divisibility of $n(n+1)(2n+1)$ by 7. Write $n = 7k + r$, where $r = 0, 1, \dots, 6$. Substituting, we see that 7 divides $r(r+1)(2r+1)$. This holds only for $r = 0, 3, 6$. Hence, all such n are of the form $7k + 3, 7k + 6, 7k + 7$, where $k \geq 0$, i.e. (3, 6, 7), (10, 13, 14), $\dots$. Since $2026 = 675 \cdot 3 + 1$, we get that 2026th number is $7 \cdot 675 + 3 = 4728$.

حل السؤال 3:

قابلية قسمة S_n على 7 تكافئ قابلية قسمة $n(n+1)(2n+1)$ على 7. نكتب $n = 7k + r$ ، حيث $r = 0, 1, \dots, 6$. بالتعويض، نجد أن 7 يقسم $r(r+1)(2r+1)$. يتحقق هذا فقط عندما يكون $r = 0, 3, 6$. بناءً على ذلك، جميع قيم n المطلوبة تأتي على الصورة $7k$ أو $7k + 3$ أو $7k + 6$. تتكرر هذه القيم بشكل دوري كل 7 أرقام، مما يعطي 3 أعداد صالحة في كل مجموعة، أي $(3, 6, 7), (10, 13, 14), \dots$. وبما أن $2026 = 675 \cdot 3 + 1$ ، فإن العدد الذي ترتيبه 2026 هو $7 \cdot 675 + 3 = 4728$.



Solution link



رابط الحل

Question 4

The floor function of x , denoted by $\lfloor x \rfloor$, is the greatest integer less than or equal to x . For example, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$, and $\lfloor 2 \rfloor = 2$. Compute:

دالة الجزء الصحيح للعدد x ، ويرمز لها بـ $\lfloor x \rfloor$ ، هي أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x ، على سبيل المثال، $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$ و $\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$ و $\lfloor 2 \rfloor = 2$ ، احسب قيمة:

$$\sum_{n=1}^{2026} \left\lfloor \frac{(2n+1)^2}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{25}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{49}{9} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{4053^2}{2026^2} \right\rfloor.$$

Solution to Question 4:

Observe that:

$$\left\lfloor \frac{(2n+1)^2}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4n^2 + 4n + 1}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor 4 + \frac{4n+1}{n^2} \right\rfloor = 4 + \left\lfloor \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right\rfloor$$

When $n \geq 5$, we have that $0 < \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} < 1$ so $\left\lfloor \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right\rfloor = 0$. Therefore, the sum is

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2026} \left\lfloor \frac{(2n+1)^2}{n^2} \right\rfloor &= 4 \times (2026 - 5 + 1) + \left\lfloor \frac{9^2}{4^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7^2}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5^2}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3^2}{1^2} \right\rfloor \\ &= 4 \times 2022 + 5 + 5 + 6 + 9 = 8113 \end{aligned}$$

حل السؤال 4:

لاحظ أن:

$$\left\lfloor \frac{(2n+1)^2}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4n^2 + 4n + 1}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor 4 + \frac{4n+1}{n^2} \right\rfloor = 4 + \left\lfloor \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right\rfloor$$

وعندما تكون $n \geq 5$ ، فإن $0 < \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} < 1$ وبالتالي $\left\lfloor \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right\rfloor = 0$. إذن، المجموع هو:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2026} \left\lfloor \frac{(2n+1)^2}{n^2} \right\rfloor &= 4 \times (2026 - 5 + 1) + \left\lfloor \frac{9^2}{4^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{7^2}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{5^2}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3^2}{1^2} \right\rfloor \\ &= 4 \times 2022 + 5 + 5 + 6 + 9 = 8113 \end{aligned}$$



Solution link



رابط الحل

Question 5

Find the digit corresponding to every letter in the sum:

$$\begin{array}{r} SHAPE \\ + IDEAS \\ \hline KAUST \end{array}$$

given that distinct letters refer to distinct digits, $S < H < A < P < E$, and $K > A > U > S > T$.

أوجد الرقم المقابل لكل حرف في المجموع التالي:

$$\begin{array}{r} SHAPE \\ + IDEAS \\ \hline KAUST \end{array}$$

علماً بأن الحروف المختلفة تمثل أرقاماً مختلفة من 0 إلى 9، و $S < H < A < P < E$ ، و $K > A > U > S > T$.

Solution to Question 5:

Since $S > T$, $A > S$, $A > U$, $H < A$, the units, tens, hundreds, thousands, ten-thousands digits give

$$1's: E + S = T + 10 \quad (1)$$

$$10's: P + A + 1 = S + 10 \quad (2)$$

$$100's: A + E + 1 = U + 10 \quad (3)$$

$$1000's: H + D + 1 = A \quad (4)$$

$$10000's: S + I = K \quad (5)$$

Adding (1) and (2), we get

$$E + P + A = T + 19. \quad (6)$$

If $E = 9$, then $A = U$ in (3) which is false. If $P = 7$, then $A = S + 2$ in (2) which is impossible because of $S < H < A$ and $A > U > S$. Therefore, $E \leq 8$, $P \leq 6$, $A \leq 5$ which gives $E + P + A \leq 19$. But, it is at least 19 by (6). Hence, $E = 8$, $P = 6$, $A = 5$, $T = 0$ and (1),(3),(4),(5) yields $S = 2$, $U = 4$, $H + D = 4$, $2 + I = K$. Since $H > S = 2$, we have $H = 3$, $D = 1$. The only two unused digits are $I = 7$, $K = 9$. Example: $23568 + 71852 = 95420$.

حل السؤال 5:

بما أن $S > T$ و $A > S$ و $A > U$ و $H < A$ ، فإن خانات الآحاد، العشرات، المئات، الألوف، وعشرات الألوف تعطي:

$$E + S = T + 10 \quad (1)$$

$$P + A + 1 = S + 10 \quad (2)$$

$$A + E + 1 = U + 10 \quad (3)$$

$$H + D + 1 = A \quad (4)$$

$$S + I = K \quad (5)$$

بجمع (1) و (2)، نحصل على:

$$E + P + A = T + 19. \quad (6)$$

إذا كان $E = 9$ ، فإن $A = U$ في (3) وهذا غير صحيح. وإذا كان $P = 7$ ، فإن $A = S + 2$ في (2) وهذا مستحيل بسبب الشروط $A > U > S$ و $S < H < A$. لذلك، $E \leq 8$ و $P \leq 6$ و $A \leq 5$ مما يعطي $E + P + A \leq 19$. ولكن، المجموع هو 19 على الأقل حسب (6). ومنه، $E = 8, P = 6, A = 5, T = 0$. وبالتعويض في (1)، (3)، (4)، (5) نجد أن $S = 2$ و $U = 4$ و $H + D = 4$ و $2 + I = K$. وبما أن $H > S = 2$ ، فإن $H = 3$ و $D = 1$. الرقمان الوحيدان المتبقيان هما $I = 7$ و $K = 9$. مثال: $23568 + 71852 = 95420$.



Solution link

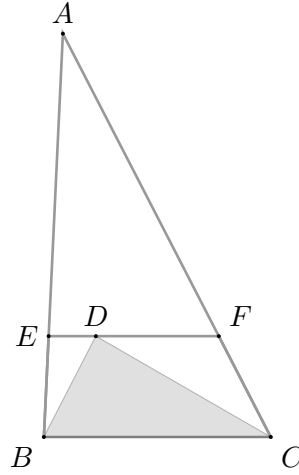


رابط الحل

Question 6

Let $\triangle ABC$ be a triangle and D be a point inside it such that $\angle DBC = \angle BCA$ and $\angle DCB = \angle BAC$. A line passing through D and parallel to BC intersects AB at E and AC at F . Given that $DB = 3$, $BC = 6$, and the area of $\triangle DBC$ is 8, calculate the area of $\triangle AEF$.

ليكن $\triangle ABC$ مثلثاً، و D نقطة بداخله بحيث $\angle DBC = \angle BCA$ و $\angle DCB = \angle BAC$ ، يمر مستقيم عبر D ويوازي BC ليقطع AB في E و AC في F ، إذا كان $DB = 3$ و $BC = 6$ ومساحة المثلث $\triangle DBC$ هي 8، فاحسب مساحة المثلث $\triangle AEF$.

Solution to Question 6:

From the given equal angles, we have that $\triangle CDB \sim \triangle ABC$ and $\triangle ABC \sim \triangle AEF$. Note that the ratio between the areas of similar triangles is the square of the ratio of their corresponding sides, and the ratio of the heights of similar triangles is the same as the ratio of their corresponding sides.

Therefore, we have that: $\frac{[\triangle ABC]}{[\triangle CDB]} = \left(\frac{BC}{DB}\right)^2 = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 4$, and $\frac{[\triangle AEF]}{[\triangle ABC]} = \left(\frac{h_{A,EF}}{h_{A,BC}}\right)^2$, where $h_{X,YZ}$ is the altitude length from point X onto line YZ .

$$\implies [\triangle ABC] = 4 \cdot [\triangle CDB] = 4 \cdot 8 = 32 \implies [\triangle AEF] = [\triangle ABC] \cdot \left(\frac{h_{A,EF}}{h_{A,BC}}\right)^2 = 32 \cdot \left(\frac{h_{A,EF}}{h_{A,BC}}\right)^2.$$

Now, we need to find the values of $h_{A,BC}$ and $h_{A,EF}$:

- $\triangle CDB \sim \triangle ABC$ with ratio of similarity 2. Therefore, ratio of heights is also $2 = \frac{h_{A,BC}}{h_{C,DB}}$. Because the area of $\triangle CDB$ is computed as $\frac{1}{2} \cdot DB \cdot h_{C,DB}$, therefore $h_{C,DB} = \frac{2[\triangle CDB]}{DB} = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3} \implies h_{A,BC} = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.
- Consider the altitude from A to EF . We have that $h_{A,EF} = h_{A,BC} - h_{D,BC} = \frac{32}{3} - h_{D,BC}$. From the area of $\triangle CDB$, we have that $h_{D,BC} = \frac{2[\triangle CDB]}{BC} = \frac{2 \cdot 8}{6} = \frac{8}{3} \implies h_{A,EF} = \frac{32}{3} - \frac{8}{3} = \frac{24}{3}$.

$$\text{Therefore, } [\triangle AEF] = 32 \cdot \left(\frac{h_{A,EF}}{h_{A,BC}}\right)^2 = 32 \cdot \left(\frac{24}{32}\right)^2 = 32 \cdot \frac{9}{16} = 18.$$

حل السؤال 6:

من تساوي الزوايا المعطى، نجد أن $\Delta CDB \sim \Delta ABC$ و $\Delta ABC \sim \Delta AEF$.
نلاحظ أن النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي مربع النسبة بين أضلاعهما المتناظرة، كما أن النسبة بين ارتفاعي مثلثين متشابهين هي نفس النسبة بين أضلاعهما المتناظرة.
وبناءً على ذلك، لدينا:

$$\frac{[\Delta ABC]}{[\Delta CDB]} = \left(\frac{BC}{DB}\right)^2 = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 4, \quad \text{و} \quad \frac{[\Delta AEF]}{[\Delta ABC]} = \left(\frac{h_{A,EF}}{h_{A,BC}}\right)^2$$

حيث يمثل $h_{X,YZ}$ طول الارتفاع من النقطة X على المستقيم YZ .
 $\Rightarrow [\Delta ABC] = 4 \cdot [\Delta CDB] = 4 \cdot 8 = 32 \Rightarrow [\Delta AEF] = [\Delta ABC] \cdot \left(\frac{h_{A,EF}}{h_{A,BC}}\right)^2 = 32 \cdot \left(\frac{h_{A,EF}}{h_{A,BC}}\right)^2$
الآن، نحتاج إلى إيجاد قيم $h_{A,EF}$ و $h_{A,BC}$:

• $\Delta CDB \sim \Delta ABC$ بنسبة تشابه مقدارها 2. لذا، فإن نسبة الارتفاعات هي أيضاً $2 = \frac{h_{A,BC}}{h_{C,DB}}$. ولأن مساحة المثلث ΔCDB تُحسب بالقانون $\frac{1}{2} \cdot DB \cdot h_{C,DB}$ ، فإن $h_{C,DB} = \frac{2[\Delta CDB]}{DB} = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow h_{A,BC} = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.

• لنأخذ الارتفاع من A إلى EF . لدينا $h_{A,EF} = h_{A,BC} - h_{D,BC} = \frac{32}{3} - h_{D,BC}$. ومن مساحة المثلث ΔCDB ، نجد أن $h_{D,BC} = \frac{2[\Delta CDB]}{BC} = \frac{2 \cdot 8}{6} = \frac{8}{3} \Rightarrow h_{A,EF} = \frac{32}{3} - \frac{8}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

وبالتالي، فإن $[\Delta AEF] = 32 \cdot \left(\frac{h_{A,EF}}{h_{A,BC}}\right)^2 = 32 \cdot \left(\frac{8}{\frac{32}{3}}\right)^2 = 32 \cdot \frac{9}{16} = 18$.



Solution link



رابط الحل

Question 7

A *multiplicative triangle* is a triangular array of positive integers in which the product of any two adjacent numbers in a row equals the number directly above them. The following is an example of a multiplicative triangle of size 4 starting with 960:

$$\begin{array}{cccc}
 & & 960 & & \\
 & & 12 & & 80 \\
 & 3 & & 4 & & 20 \\
 3 & & 1 & & 4 & & 5
 \end{array}$$

Find the number of multiplicative triangles of size 5 starting with 2025.

"المثلث الضربي" هو ترتيبية مثلثية من الأعداد الصحيحة الموجبة، يكون فيها حاصل ضرب أي عددين متجاورين في صف ما مساوياً للعدد الموجود فوقهما مباشرة، فيما يلي مثال لمثلث ضربي من الحجم 4 يبدأ بالعدد 960:

$$\begin{array}{cccc}
 & & 960 & & \\
 & & 12 & & 80 \\
 & 3 & & 4 & & 20 \\
 3 & & 1 & & 4 & & 5
 \end{array}$$

أوجد عدد المثلثات الضربية من الحجم 5 والتي تبدأ بالعدد 2025.

Solution to Question 7:

Assume that the 5 numbers at the last row are $(a_1, a_2, \dots, a_5)$ in this order. Notice that $2025 = a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_5^{k_5}$ where each k_i is the contribution of a_i to the final product. notice that k_i is equal to the number of paths from 2025 to a_i which is $\binom{n-1}{i-1}$ which means $2025 = a_1^1 \cdot a_2^4 \cdot a_3^6 \cdot a_4^4 \cdot a_5^1$ but $2025 = 3^4 \cdot 5^2 \Rightarrow a_3 = 1$ and now we conclude with two cases:

case1 (all threes are within a_2 or a_4): in this case we will have $2 \cdot 3$ possible solutions (#ways to distribute threes times ways to #distribute the fives)

case2(all threes are in a_1 or a_5): In this case we have $5 \cdot 3$ possible ways.

Hence, our final answer is $6 + 15 = 21$

حل السؤال 7:

لنفرض أن الأعداد الخمسة في الصف الأخير هي $(a_1, a_2, \dots, a_5)$ بهذا الترتيب. نلاحظ أن $2025 = a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_5^{k_5}$ حيث يمثل كل k_i مساهمة a_i في الناتج النهائي. لاحظ أن k_i يساوي عدد المسارات من 2025 إلى a_i وهو $\binom{n-1}{i-1}$ ، مما يعني أن $2025 = a_1^1 \cdot a_2^4 \cdot a_3^6 \cdot a_4^4 \cdot a_5^1$ وبما أن $2025 = 3^4 \cdot 5^2 \Rightarrow a_3 = 1$ ، ومن هنا نستنتج حالتين:

الحالة 1 (جميع العوامل 3 تقع ضمن a_2 أو a_4): في هذه الحالة سيكون لدينا $2 \cdot 3$ من الحلول الممكنة (عدد طرق توزيع العوامل 3 مضروباً في عدد طرق توزيع العوامل 5).

الحالة 2 (جميع العوامل 3 تقع في a_1 أو a_5): في هذه الحالة لدينا $5 \cdot 3$ من الطرق الممكنة. وبالتالي، إجابتنا النهائية هي $6 + 15 = 21$.



Solution link



رابط الحل

Question 8

Let a, b, c be distinct real numbers such that $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 3$. What is the largest possible value of $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$?

لتكن a, b, c أعداداً حقيقية مختلفة بحيث $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 3$ ، ما هي أكبر قيمة ممكنة لـ $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ ؟

Solution to Question 8:

Since we can replace (a, b, c) by (ta, tb, tc) for some non-zero t . We can set $t = 1/c$ and then without loss of generality, we can assume $c = 1$ then $b^2 + a(a-3)b + a = 0$. Hence, the discriminant is non-negative, that is, $a(a-1)^2(a-4) \geq 0$. Hence, if $a = 1$ then $a = b = c = 1$. If $a \geq 4$ or $a < 0$ we have

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = a \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{a} \right) + \frac{1}{a} = 3a + \frac{1}{a} - a^2 = \frac{3a^2 + 1 - a^3}{a} = \frac{(4-a)(1+2a)^2}{4a} - \frac{15}{4} \leq -\frac{15}{4}$$

Since $a(4-a) \leq 0$. Hence, the maximum is $-\frac{15}{4}$ and it occurs whenever $(a, b, c) = (4, -2, 1)$.

Solution 2. Denote $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{b}$, $z = \frac{a}{c}$, we need to find $\max(xy + yz + zx)$ where $xyz = 1$ and $x + y + z = 3$. Since $xyz = 1$, at least one of x, y, z is positive, say it is x . Substituting $yz = 1/x$ and $y + z = 3 - x$, we get

$$xy + yz + zx = \frac{1}{x} + x(3 - x).$$

This function has non-positive derivative $-\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2} \leq 0$ which means that it is non-increasing. We show that $x \geq 4$ which leads the largest value of the function to be at most $-\frac{15}{4}$ at $x = 4$, with equality $(x, y, z) = (4, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. To show this, we substitute $yz, y + z$ in $(y + z)^2 \geq 4yz$, we arrive at $(x-1)^2(x-4) \geq 0$ which implies $x \geq 4$, because of $x = \frac{b}{a} \neq 1$.

Solution 3(pqr-method). Denote $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{b}$, $z = \frac{a}{c}$, we need to find $\max(xy + yz + zx)$ where $r = xyz = 1$ and $p = x + y + z = 3$. Substituting r, p into the pqr-inequality

$$-4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 \geq 0,$$

we get $-(q-3)^2(4q+15) \geq 0$. If $q = 3$, then $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) - 2(x+y+z) + 3 = 0$ which means $x = y = z = 1$, impossible. Therefore, $q \leq -\frac{15}{4}$ and equality holds for $(x, y, z) = (4, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

حل السؤال 8:

بما أننا نستطيع استبدال (a, b, c) بـ (ta, tb, tc) لأي قيمة t غير صفرية، يمكننا وضع $t = 1/c$ وافترض أن $c = 1$ دون فقدان العمومية، فتصبح المعادلة $b^2 + a(a-3)b + a = 0$. ومنه، يكون المميز غير سالب، أي $a(a-1)^2(a-4) \geq 0$. فإذا كان $a = 1$ فإن $a = b = c = 1$. أما إذا كان $a \geq 4$ أو $a < 0$ فلدينا:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = a \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{a} \right) + \frac{1}{a} = 3a + \frac{1}{a} - a^2 = \frac{3a^2 + 1 - a^3}{a} = \frac{(4-a)(1+2a)^2}{4a} - \frac{15}{4} \leq -\frac{15}{4}$$

بما أن $a(4-a) \leq 0$ ومنه، تكون القيمة العظمى هي $-\frac{15}{4}$ وتتحقق عندما $(a, b, c) = (4, -2, 1)$.
الحل 2. بفرض $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{b}$, $z = \frac{a}{c}$ ، نحتاج لإيجاد $\max(xy + yz + zx)$ حيث $xyz = 1$ و

$x + y + z = 3$ بما أن $xyz = 1$ ، فإن واحداً على الأقل من x, y, z موجب، وليكن x . بالتعويض عن $yz = 1/x$ و $y + z = 3 - x$ نحصل على:

$$xy + yz + zx = \frac{1}{x} + x(3 - x).$$

لهذه الدالة مشتقة غير موجبة $-\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2} \leq 0$ مما يعني أنها تناقصية. نبين أن $x \geq 4$ مما يجعل القيمة العظمى للدالة هي $-\frac{15}{4}$ عند $x = 4$ ، مع تحقق المساواة عند $(x, y, z) = (4, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. ولإثبات ذلك، نعوض $yz, y + z$ في $(y + z)^2 \geq 4yz$ لنصل إلى $(x - 1)^2(x - 4) \geq 0$ مما يقتضي $x \geq 4$ ، لأن $x = \frac{b}{a} \neq 1$.
الحل 3 (طريقة pqr). بفرض $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$ ، نحتاج لإيجاد $\max(xy + yz + zx)$ حيث $r = xyz = 1$ و $p = x + y + z = 3$. بالتعويض عن r, p في متباينة pqr :

$$-4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 \geq 0,$$

نحصل على $-(q - 3)^2(4q + 15) \geq 0$. إذا كان $q = 3$ فإن $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 0$ مما يعني $x = y = z = 1$ وهذا مستحيل. لذلك، $q \leq -\frac{15}{4}$ وتتحقق المساواة عند $(x, y, z) = (4, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.



Solution link



رابط الحل

KMC 2026

KAUST MATHEMATICS COMPETITION

مسابقة كاوست للرياضيات

Strategic Partner: